ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET — BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

29.6.2002.

MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Odrediti kompleksnost algoritma za izračunavanje vrednosti determinante reda n

a) ako se primenjuje razvoj detrminante po nekoj vrsti ili koloni,

b) ako se determinanta transformiše na trougaoni oblik.

2. Odrediti broj baza u F^n $(F = GF(q))$. Koliko ima linearnih (n, m)-kodova nad poljem F.

3. Definicija i primer formalne teorije.

4. Izračunati $\int_0^{\infty} e^{-x} x^2 L_n^2(x)\, dx$, gde je L_n Laguerreov polinom.

5. Polazeći od funkcije generatrise izvesti izraz za Čebiševljev polinom.

NAPOMENA:
- **Ispit traje 2.5 sata.**
- **Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

29.6.2002.

MATEMATIKA 4

- numerička analiza -

1. Metodom polovljenja intervala, sa tačnošću od $\varepsilon = 10^{-3}$, naći maksimum funkcije:

$$y = f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1},$$

ukoliko se zna da postoji tačno jedan maksimum funkcije u intervalu $(2, \infty)$.

2. Eulerovom metodom poligonalnih linija rešiti diferencijalnu jednačinu:

$$y'(x) + \frac{2x+1}{x(x^2+x+1)} y(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+x+1)x}}$$

na intervalu $[1, 2]$ ako je $y(1) = 1$ i $h = 0.5$.

3. Izvesti trotačkastu Gauss-Legendreovu formulu.

NAPOMENA:
- **Ispit traje 1.5 sat.**
- **Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET — BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

11.9.2002.

MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Opisati kodiranje formula predikatskog računa. Ilustrovati kodiranje na primeru sledeće formule:

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\, R_1^2(x_1, x_2).$$

2. Nad $GF(2)$ odrediti sve ireducibilne polinome stepena 2 i 3.

3. Opisati sledeće heuristike za problem trgovačkog putnika i komentarisati njihov kvalitet:

a) heuristika najbližeg suseda,

b) 3-optimalna heuristika.

4. Dokazati rekuretnu relaciju:

$$xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x),$$

a zatim izračunati integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} xP_n'(x)P_n(x)\,dx$, gde je P_n Legendreov polinom.

5. Dokazati ortogonalnost Laguerreovih polinoma.

NAPOMENA:
- **Ispit traje 2.5 sata.**
- **Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

11.9.2002.

MATEMATIKA 4

- numerička analiza -

1. Metodom prostih iteracija naći koren jednačine:

$$y^9 - 3y^2 + 1 = 0,$$

u intervalu $[1, 2]$, sa šest tačnih decimala.

2. Odrediti A, B i C tako da kvadraturna formula:

$$\int_0^{2h} x^2 f(x)\, dx = Af(x_0) + B\Delta f(x_0) + C\Delta^2 f(x_0) + R(f)$$

bude tačna za polinome što većeg stepena.

3. Runge-Kutta metod drugog reda.

NAPOMENA:
- **Ispit traje 1.5 sat.**
- **Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Principom rezolucije dokazati valjanost formula:

a) $(\exists x)\big(A(x) \wedge B(x)\big) \Longrightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$,

b) $(\forall x)C(x) \vee (\forall x)D(x) \Longrightarrow (\forall x)\big(C(x) \vee D(x)\big)$.

2. Neka je $(X, \vee, \wedge)$ mreža. Dokazati da je preslikavanje $f_a(x) = a \vee x$ monotono. Odrediti sliku intervala $[a \wedge b, a]$, $[a \wedge b, b]$, $[a, a \vee b]$ i $[b, a \vee b]$ pod dejstvom preslikavanja f_a.

3. Definicija rekurzivne funkcije. Churchova teza i njeno značenje.

4. **1⁰.** Ispitati da li je za Besselovu funkciju prve vrste tačna formula:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{\nu}}{J_{\nu}(x)}\right) = x^{\nu}\,\frac{J_{\nu+1}(x)}{J_{\nu}^2(x)}.$$

2⁰. Dokazati da je tačna asimptotska relacija:

$$J_{\nu}(x) \sim \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} \quad (x \to 0) \qquad (\nu \neq -1, -2, \ldots).$$

3⁰. Izračunati integral:

$$\int_0^t x^{\nu}\,\frac{J_{\nu+1}(x)}{J_{\nu}^2(x)}\,dx \qquad (\nu \neq -1, -2, \ldots).$$

5. Izvesti eksplicitnu formulu za Hermiteove polinome koristeći diferencijalnu jednačinu.

NAPOMENA:
- **Ispit traje 2.5 sata.**
- **Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

MATEMATIKA 4

- numerička analiza -

1. Primenom prvog NEWTONovog interpolacionog polinoma izračunati:

a) $S_n = \sum_{k=1}^{3n} k^2$,

b) $\sigma_n = \sum_{k=1}^{3n} (-1)^k k^2$.

2. Diskretnom srednje kvadratnom aproksimacijom (METOD NAJMANJIH KVADRATA) odrediti parametre a, b, c u aproksimacionoj funkciji $\Phi(x) = ax^2 + bx + c$ za sledeći skup podataka:

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	-1	-1	1	5

Odrediti vrednost srednje kvadratne greške $\sigma = \sqrt{\sum_{i=0}^{4} |f(x_i) - \Phi(x_i)|^2}$.

3. Izvesti prvi i drugi NEWTONov interpolacioni polinom.

NAPOMENA:
- **Ispit traje 1.5 sat.**
- **Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

12.2.2003.

MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Polazeći od činjenice da su aritmetičke funkcije: $f_1(x,y) = x + y$, $f_2(x,y) = x \cdot y$, $f_3(x,y) = x^y$ i $f_4(x,y) = x \dot{-} y$ rekurzivne, dokazati rekurzivnost sledećih funkcija:

a) $f(x) = \overline{\text{sgn}}(x)$.

b) $g(y) = [\sqrt{5} \cdot y]$.

2. Dokazati savršenost sledećeg linearanog koda u $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{matrix}$$

(kodne reči su određene kolonama). Odrediti generatorsku matricu koda. Dešifrovati reči: 0 2 1 0 i 1 2 1 1.

3. Postupak za prevođenje formule kvantifikatorskog računa u preneks normalni oblik.

4. **1°.** Za Laguerrove polinome L_n dokazati rekuretnu relaciju:

$$nL_{n-1}(x) + L_n'(x) - nL_{n-1}'(x) = 0.$$

2°. Izračunati integral: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} L_{n+1}'(x) L_n(x)\, dx$.

5. Izvesti Besselovu diferencijalnu jednačinu.

NAPOMENA:
- **Ispit traje 2.5 sata.**
- **Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

12.2.2003.

MATEMATIKA 4

- numerička analiza -

1. Odrediti realne parametre A, B i c tako da kvadraturna formula:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = Af\Big(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Big) + Bf(-c) + Bf(c) + Af\Big(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Big)$$

bude tačna za polinome što je moguće višeg stepena.

2. Jednačina $e^{\bar{z}} - |z| = 0$ ima koren u blizini tačke $1.88 + 6.28i$. Naći koren jednačine sa tačnošću $\varepsilon = 0.005$.

3. Izvesti prvi i drugi NEWTONov interpolacioni polinom.

NAPOMENA:
- **Ispit traje 1.5 sat.**
- **Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET — BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

1.3.2003.

MATEMATIKA 4

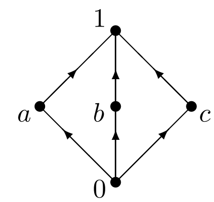
- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Transformisati formule u preneks normalnu formu:

a) $(\forall x)(\forall y)\Big((\exists z)\big(P(x,z) \wedge P(y,z)\big) \Longrightarrow (\exists u)Q(x,y,u)\Big)$,

b) $(\forall x)(\forall y)\Big((\exists z)P(x,y,z) \wedge \big((\exists u)Q(x,u) \Longrightarrow (\exists v)Q(y,v)\big)\Big)$.

2. Ispitati distributivnost i modularnost sledeće mreže:



3. TURINGova mašina.

4. **1⁰.** Dokazati da BESSELova funkcija prve vrste $J_\nu(\alpha x)$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu:

$$x^2y'' + xy' + (\alpha^2x^2 - \nu^2)y = 0.$$

2⁰. Dokazati jednakost:

$$\int_0^x J_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)x\,dx = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2}\Big(\alpha J_\nu(\beta x)J_{\nu+1}(\alpha x) - \beta J_\nu(\alpha x)J_{\nu+1}(\beta x)\Big),$$

gde je $\alpha \neq \beta$, $\nu > -1$ i J_ν BESSELova funkcija prve vrste.

5. Dokazati ortogonalnost LAUGERREovih polinoma.

NAPOMENA:
- **Ispit traje 2.5 sata.**
- **Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

MATEMATIKA 4

- numerička analiza -

1. Neka je data funkcija: $F(t) = t^2 + \frac{1}{2}t - 1 + \sqrt{1-t^2} : [0,1] \longrightarrow R$. Ukoliko se zna da funkcija F ima tačno jedan maksimum u tački $c \in (0,1)$, izračunati c sa tačnošću $\varepsilon = 0.005$.

2. Za diferencijalnu jednačinu $y' = x^2y^2 - 1$, pri početnom uslovu $y(0) = 1$, odrediti prvih pet članova razvoja rešenja u MACLAURINov red.

3. Izvesti prvi i drugi NEWTONov interpolacioni polinom.

NAPOMENA:
- **Ispit traje 1.5 sat.**
- **Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

11.5.2003.

KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. U zavisnosti od prirodnog broja n, uzimajući operacije sabiranja i množenja za elemantarne korake, proceniti kompleksnost izračunavanja vrednosti funkcije:

$$F(x,y) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} a_{k,m-k}\, x^k y^{m-k}$$

u datoj tački $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Koeficijenti funkcije su poznati realni brojevi.

2. Ispitati svodljivost polinoma:

$$P_k(x) = x^2 + kx + 1$$

nad poljem GF(3) u zavisnosti od parametra k.

3. Definisati i obrazložiti pravila izvođenja:

a) modus ponens,

b) rezolucija.

4. **a)** Dokazati rekuretnu relaciju:

$$xP_n^{'}(x) - P_{n-1}^{'}(x) = nP_n(x).$$

b) Izračunati integral:

$$\int_{-1}^{1} xP_n^{'}(x)P_n(x)\,dx.$$

P_n je Legendreov polinom.

5. Koristeći Hermiteovu diferencijalnu jednačinu izvesti eksplicitni oblik za Hermiteove polinome.

NAPOMENA:
- **Kolokvijum traje 2.5 sata.**
- **Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

8.7.2003.

MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Odrediti kompoziciju $\alpha\beta$ supstitucija:

a) $\alpha = \{x \rightarrow f(y),\ y \rightarrow z\}$, $\beta = \{x \rightarrow a,\ y \rightarrow b,\ z \rightarrow y\}$;

b) $\alpha = \{x \rightarrow a,\ y \rightarrow f(z),\ z \rightarrow y\}$, $\beta = \{x \rightarrow b,\ y \rightarrow z,\ z \rightarrow g(x)\}$.

2. U aditivnoj grupi $\mathbf{Z}_6 = (Z_6, +_6)$ odrediti:

a) Red svakog elementa.

b) Generatore grupe.

c) Ciklične podgrupe.

3. Definicija rekurzivne funkcije. CHURCHova teza i njeno značenje.

4. **1⁰.** Dokazati rekuretnu relaciju za LAGUERREove polinome:

$$L_{n+1}(x) + (x - 2n-1)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0.$$

2⁰. Izračunati integral: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^2 L_n^2(x)\, dx.$

5. Dokazati RODRIGUESovu formulu za LEGENDREove polinome.

NAPOMENA:
- **Ispit traje 2.5 sata.**
- **Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET — BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

9.9.2003.

MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Polazeći od činjenice da su aritmetičke funkcije $f_1(x,y) = x + y$ i $f_2(x,y) = x \cdot y$ rekurzivne, dokazati rekurzivnost funkcija: $f(x) = x!$, $g(x) = x \dot{-} 1$ i $h(x,y) = x \dot{-} y$.

2. Navesti definicije S i A mreže. Dokazati da je svaka S-mreža ujedno i A-mreža.

3. Definisati pojmove: atom, literal, sastavak, rezolventa.

4. Izraziti sferne Besselove funkcije $J_{1/2}(x)$ i $J_{-1/2}(x)$ u konačnom obliku pomoću elementarnih funkcija.

5. Polazeći od funkcije generatrise izvesti izraz za ČEBIŠEVljev polinom.

NAPOMENA:
- **Ispit traje 2.5 sata.**
- **Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

7.10.2003.

MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Principom rezolucije dokazati valjanost sledećih formula:

a) $(\forall y)(\forall x)A(x,y) \Longrightarrow (\exists x)(\forall y)A(x,y)$,

b) $(\exists x)(\forall y)A(x,y) \Longrightarrow (\forall y)(\exists x)A(x,y)$,

c) $(\forall y)(\exists x)A(x,y) \Longrightarrow (\exists x)(\exists y)A(x,y)$.

2. Nad GF(3) odrediti sve ireducibilne polinome stepena 1 i 2.

3. Definicija i primer formalne teorije.

4. Izračunati $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x \cdot L_n'(x)L_m'(x)\,dx$, gde je L_n Laguerreov polinom.

5. Izvesti izraz za Legendreovu diferencijalnu jednačinu.

NAPOMENA:
- **Ispit traje 2.5 sata.**
- **Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

30.1.2004.

MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Principom rezolucije dokazati valjanost sledećih formula:

a) $(\forall x)(\forall y)A(x,y) \Longrightarrow (\exists y)(\forall x)A(x,y)$,

b) $(\exists y)(\forall x)A(x,y) \Longrightarrow (\forall x)(\exists y)A(x,y)$,

c) $(\forall x)(\exists y)A(x,y) \Longrightarrow (\exists y)(\exists x)A(x,y)$.

2. Dokazati da je svaka distributivna mreža ujedno i modularna. Da li važi i obrnuto?

3. Pregled osnovnih pojmova iz teorije linearnih kodova.

4. Ako je P_n Legendreov polinom, odrediti $P_n(1)$ i $P_n(0)$, a zatim izračunati $\int\limits_0^1 P_{2n+1}(x)\,dx$.

5. Diferencijalna jednačina Laguerreovih polinoma.

NAPOMENA:
- **Ispit traje 2.5 sata.**
- **Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

27.2.2004.

MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Azbuka TURINGove mašine sadrži simbole 0, 1 i prazno slovo b. Prirodni brojevi se predstavljaju svojim binarnim zapisom. Konstruisati program za ovu mašinu koji utvrđuje da li je zadan prirodni broj deljiv sa 8.

2. Dokazati da je sledeća formula

$$(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x) \Longrightarrow (\forall x)(A(x) \wedge B(x))$$

teorema predikatskog računa.

3. Dokazati da konačno polje ima p^k elemenata gde je p prost a k prirodan broj.

4. Izračunati

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} (H_n(x))^2 \, dx,$$

gde je $H_n(x)$ HERMITEov polinom.

5. Dokazati da za ČEBIŠEVljeve polinome važi formula

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

NAPOMENA:
- **Ispit traje 2.5 sata.**
- **Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

22.5.2004.

KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Principom rezolucije dokazati valjanost formula:

a) $(\exists x)A(x) \land (\forall x)B(x) \Longrightarrow (\exists x)\big(A(x) \land B(x)\big)$,

b) $(\forall x)\big(C(x) \lor D(x)\big) \Longrightarrow (\forall x)C(x) \lor (\exists x)D(x)$.

2. Ispitati svodljivost polinoma:

$$P_k(x) = x^2 + kx + 1$$

nad poljem GF(3) u zavisnosti od parametra k.

3. Opisati 3-optimalnu heuristiku za problem trgovačkog putnika.

4. Izračunati integral

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)\, P_n(x)\, dx,$$

gde je $P_n(x)$ Legendreov polinom i $L_n(x)$ Laguerreov polinom.

5. Koristeći Hermiteovu diferencijalnu jednačinu izvesti eksplicitni oblik za Hermiteove polinome.

NAPOMENA:
- **Kolokvijum traje 2.5 sata.**
- **Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

25.6.2004.

MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Odrediti kompleksnost problema da li u zadanom grafu sa n čvorova postoji potpun podgraf sa k čvorova.

2. Odrediti kompoziciju $\alpha\beta$ supstitucija:

a) $\alpha = \{x \to f(y),\ y \to z\}$, $\beta = \{x \to a,\ y \to b,\ z \to y\}$;

b) $\alpha = \{x \to a,\ y \to f(z),\ z \to y\}$, $\beta = \{x \to b,\ y \to z,\ z \to g(x)\}$.

3. a) Dokazati da je karakteristika konačnog polja prost broj. **b)** Dokazati da konačno polje ima p^k elemenata, gde je p prost a k prirodan broj.

4. Izračunati:

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) P_n(x)\, dx,$$

gde je $P_n(x)$ LEGENDREov polinom i $L_n(x)$ LAGUERREov polinom.

5. Izvesti formulu za integralni oblik BESSELovih polinoma i pokazati da je

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z).$$

NAPOMENA:
- **Ispit traje 2.5 sata.**
- **Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET — BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

27.8.2004.

MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. a) Neka je data aritmetička funkcija:

$$f_1(x,y) = x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & : \quad x \geq y, \\ 0 & : \quad x < y. \end{cases}$$

Dokazati da za prirodne brojeve x, y i z važi jednakost: $x \dot{-} (y+z) = (x \dot{-} y) \dot{-} z$.

b) Dokazati rekurzivnost sledećih aritmetičkih funkcija:

(i) $f_1(x,y) = x \dot{-} y$,

(ii) $f_2(x,y) = |x-y|$,

(iii) $f_3(x,y) = \min\{x,y\}$,

(iv) $f_4(x,y) = \max\{x,y\}$.

2. Neka u mreži $(X, \vee, \wedge)$ važi:

$$(*) \qquad (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x).$$

Dokazati da je tada mreža modularna.

3. Opisati prevođenje formule kvantifikatorskog računa u preneksni normalni oblik. Skolemizacija formule.

4. 1⁰. Dokazati da HERMITEov polinom

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$(1) \qquad y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

2⁰. Koristeći diferencijalnu jednačinu (1) dokazati da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n).$$

5. Dokazati ortogonalnost LAGUERREovih polinoma.

NAPOMENA:

- **Ispit traje 2.5 sata.**
- **Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD

Katedra za primenjenu matematiku

24.9.2004.

MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Koristeći se metodom rezolucije dokazati da je formula

$$(\exists x)\big(A(x) \wedge B(x)\big)$$

posledica formula

$$(\exists x)\big(A(x) \wedge C(x)\big), \quad (\forall x)\big(C(x) \Longrightarrow (B(x) \wedge D(x))\big).$$

2. **a)** Dokazati da za svaki element x polja $GF(p)$ polinom $x^p - x$ je identički jednak 0.

b) Faktorisati polinom $x^p - x$ na nesvodljive faktore u polju $GF(p)$.

3. Definicija rekurzivne funkcije i CHURCHova teza.

4. Dokazati da je

$$\int_0^{\pi/2} J_1(x\cos\theta)\,d\theta = \frac{1-\cos x}{x},$$

gde je $t \mapsto J_1(t)$ BESSELova funkcija.

5. Izvesti eksplicitni izraz za HERMITEove polinome koristeći odgovarajuću diferencijalnu jednačinu.

NAPOMENA:
- **Ispit traje 2.5 sata.**
- **Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**