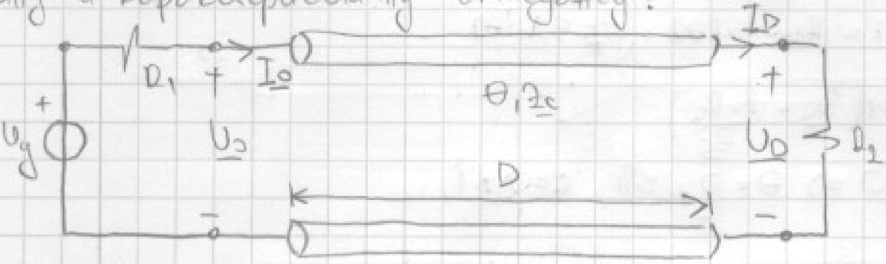
Водови

① Вод је без губитака. Одзив је устаљен. Побуда је простопериодична. R_1 и R_2 су познати. $u_g(t) = U_m \sin(\omega t)$.

а) Одредити електричну дужину вода θ и карактеристичну импедансу вода $\underline{Z_c}$ тако да средња снага која се предаје воду буде највећа могућа.

б) Одредити средњу снагу отпорника, којим је завршен вод, за одређену електричну дужину и карактеристичну импедансу

в) Колики је коефицијент рефлексије на улазу вода за одређену електричну дужину и карактеристичну импедансу?



• једначине вода
$$\begin{cases} \underline{U}(z) = ch(\underline{\gamma}(D-z))\underline{U_D} + \underline{Z_c}\, sh(\underline{\gamma}(D-z))\underline{I_D} \\ \underline{I}(z) = \underline{Y_c}\, sh(\underline{\gamma}(D-z))\underline{U_D} + ch(\underline{\gamma}(D-z))\underline{I_D} \end{cases}$$

$$\underline{Z_c} = \sqrt{\frac{\underline{Z'}}{\underline{Y'}}}, \quad \underline{Z'} = R' + j\omega L', \quad \underline{Y'} = G' + j\omega C'$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z'} \cdot \underline{Y'}} = \alpha + j\beta, \quad \alpha \to \text{слабљење}, \quad \beta \to \text{коеф. простирања}$$

• једначине вода улаз–излаз ($z=0$):
$$\underline{U_0} = ch(\underline{\gamma}D)\underline{U_D} + \underline{Z_c}\, sh(\underline{\gamma}D)\underline{I_D}$$
$$\underline{I_0} = \underline{Y_c}\, sh(\underline{\gamma}D)\underline{U_D} + ch(\underline{\gamma}D)\underline{I_D}$$

$$\underline{Z_{ul}} = \frac{\underline{U_0}}{\underline{I_0}}$$

• вод без губитака $\Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \underline{\gamma} = j\beta, \quad \theta = \beta \cdot D, \quad \beta = \omega\sqrt{L' \cdot C'}$

$$ch(j\beta \cdot D) = \frac{e^{j\beta D} + e^{-j\beta D}}{2} = \cos(\theta)$$
$$sh(j\beta D) = \frac{e^{j\beta D} - e^{-j\beta D}}{2} = j\sin(\theta)$$

$$\begin{cases} \underline{U_0} = \cos(\theta)\underline{U_D} + j\underline{Z_c}\sin(\theta)\underline{I_D} \\ \underline{I_0} = j\underline{Y_c}\sin(\theta)\underline{U_D} + \cos(\theta)\underline{I_D} \end{cases}$$

• коефицијент рефлексије:
$$\underline{\rho}(z) = \frac{\underline{U_D} - \underline{I_D} \cdot \underline{Z_c}}{\underline{U_D} + \underline{I_D} \cdot \underline{Z_c}}\, e^{-2\underline{\gamma}(D-z)}$$

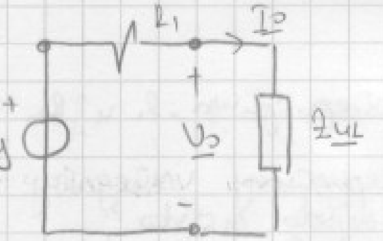
$$* \; z = 0 \Rightarrow \underline{\rho_0} = \frac{\underline{U_D} - \underline{I_D} \cdot \underline{Z_c}}{\underline{U_D} + \underline{I_D} \cdot \underline{Z_c}}\, e^{-2\underline{\gamma}D}$$

$$* \; \alpha = 0 \Rightarrow \underline{\rho_0} = \frac{\underline{U_D} - \underline{I_D} \cdot \underline{Z_c}}{\underline{U_D} + \underline{I_D} \cdot \underline{Z_c}}\, e^{-2j\theta}, \quad \underline{\rho_P} = \frac{\underline{U_D} - \underline{I_D}\underline{Z_c}}{\underline{U_D} + \underline{I_D}\underline{Z_c}} \Rightarrow \underline{\rho_0} = \underline{\rho_P} \cdot e^{-2j\theta}$$

а) $\underline{U_D} = R_2 \underline{I_D}$

$$\underline{U_0} = \cos(\theta)\underline{U_D} + j\underline{Z_c}\sin(\theta)\underline{I_D}$$
$$\underline{I_0} = j\underline{Y_c}\sin(\theta)\underline{U_D} + \cos(\theta)\underline{I_D}$$

$$\underline{Z_{ul}} = \frac{\underline{U_0}}{\underline{I_0}} = \frac{\cos(\theta)\underline{I_D}R_2 + j\underline{Z_c}\sin(\theta)\underline{I_D}}{j\underline{Y_c}\sin(\theta)\underline{I_D}R_2 + \cos(\theta)\underline{I_D}} = \frac{R_2\cos(\theta) + j\underline{Z_c}\sin(\theta)}{j\underline{Y_c}R_2\sin(\theta) + \cos(\theta)}$$



$P_{max} \Rightarrow$ кад је прилагођен $\Rightarrow \boxed{R_1 = \underline{Z_{uL}}}$

$$R_1 = \frac{R_2\cos(\theta) + j\underline{Z_c}\sin(\theta)}{j\frac{R_2}{\underline{Z_c}}\sin(\theta) + \cos(\theta)}$$

$$R_1\cos(\theta) + j\frac{R_1R_2}{\underline{Z_c}}\sin(\theta) = R_2\cos(\theta) + j\underline{Z_c}\sin(\theta)$$

$$(R_1 - R_2)\cos(\theta) = j\sin(\theta)\left(\underline{Z_c} - \frac{R_1R_2}{\underline{Z_c}}\right)$$

1) $R_1 = R_2 = R \wedge \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0 + k\pi,\ k = 0, \pm 1, \dots$

$\underline{Z_c} = R$

2) $R_1 = R_2 = R \wedge \underline{Z_c} = \frac{R_1R_2}{\underline{Z_c}} \Rightarrow \underline{Z_c} = R$

$\theta \rightarrow$ произвољно

3) $\cos(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k = 0, \pm 1 \dots \wedge \underline{Z_c} = \frac{R_1R_2}{\underline{Z_c}} \Rightarrow Z_c = \sqrt{R_1R_2},\ R_1 \neq R_2$

б) $\underline{V_0} = \cos(\theta)\underline{V_D} + j\underline{Z_c}\sin(\theta)\underline{I_D}$

$\underline{V_0} = \underline{I_D}(\cos(\theta)\cdot R_2 + j\underline{Z_c}\sin(\theta))$

$\underline{V_0} = \underline{V_g} - \underline{I_0}\cdot R_1$

$\underline{I_0} = (j\underline{Y_c}R_2\sin(\theta) + \cos(\theta))\underline{I_D}$

$\underline{V_0} = \underline{V_g} - R_1\underline{I_D}(j\underline{Y_c}R_2\sin(\theta) + \cos(\theta))$

$$\underline{V_g} = \underline{I_D}\left(R_2\cos(\theta) + j\underline{Z_c}\sin(\theta) + R_1\cos(\theta) + j\frac{R_1R_2}{\underline{Z_c}}\cdot\sin(\theta)\right)$$

$$\underline{I_D} = \frac{\underline{V_g}}{(R_1+R_2)\cos(\theta) + j\sin(\theta)\left(\underline{Z_c} + \frac{R_1R_2}{\underline{Z_c}}\right)}$$

$$P_{R_2} = \left|R_2\cdot\underline{I_D}^2\right|$$

1) $\theta = 0,\ R_1 = R_2 = R,\ \underline{Z_c} = R$

$$\underline{I_D} = \frac{\underline{V_g}}{2R} \Rightarrow P_{R_2} = \frac{R\cdot V_m^2}{4R^2} = \frac{V_m^2}{4R}$$

2) $\theta = \frac{\pi}{2},\ R_1 \neq R_2,\ \underline{Z_c} = \sqrt{R_1R_2}$

$$\underline{I_D} = \frac{\underline{V_g}}{2j\sqrt{R_1R_2}} \Rightarrow P_{R_2} = \frac{\cancel{R_2}V_m^2}{4R_1\cancel{R_2}} = \frac{V_m^2}{4R_1}$$

в) $$\underline{\rho}(0) = \frac{\underline{V_D} - \underline{I_D}\cdot\underline{Z_c}}{\underline{V_D} + \underline{I_D}\cdot\underline{Z_c}}e^{-2j\theta}$$

1) $\theta = 0 \wedge R_1 = R_2 = R,\ \underline{Z_c} = R$

$$\underline{\rho}(0) = \frac{\underline{I_D}\cdot R - \underline{I_D}\cdot R}{\underline{I_D}\cdot R + \underline{I_D}\cdot R} = 0$$

2) $\theta = \frac{\pi}{2} \wedge \underline{Z_c} = \sqrt{R_1R_2}$

$$\rho(0)=\frac{I_D\cdot R_2-I_D\cdot Z_c}{I_D\cdot R_2+I_D\cdot Z_c}\cdot(-1)=\boxed{-\frac{R_2-\sqrt{R_1R_2}}{R_2+\sqrt{R_1R_2}}}$$

① Вод у колу са слике је без губитака. Одзив је устаљен. Одредити струју калема и средњу снагу извора.

$$u_g(t)=\sqrt{2}\,U\cos(2\pi f t)+U\sin(4\pi f t)$$

$$R_1=\sqrt{\frac{L'}{C'}}\;,\; D\cdot f\sqrt{C'\cdot L'}=1\;,\; L\pi f=R_2$$

$\omega_1=2\pi f\;,\;\omega_2=4\pi f$

Одзив је устаљен $\Rightarrow$ важи суперпозиција!

1) $\omega_1=2\pi f=\omega$

$$\underline{U_0}^{(1)}=\cos(\theta^1)\,\underline{U_D}^1+jZ_c\sin(\theta^1)\,\underline{I_D}^1$$
$$\underline{I_0}^{(1)}=jY_c\sin(\theta^1)\,\underline{U_D}^1+\cos(\theta^1)\,\underline{I_D}^1$$

$$\theta^1=\beta^1\cdot D\;,\;\beta^1=\omega_1\cdot\sqrt{L'C'}\Rightarrow\theta^1=2\pi f\cdot\underbrace{D\cdot\sqrt{L'C'}}_{1}=2\pi$$

$$\underline{U_0}^1=\underline{U_D}^1$$
$$\underline{I_0}^1=\underline{I_D}^1$$

$$\left.\begin{array}{l}\underline{U_D}^1=(R_2+j\omega L)\,\underline{I_D}^1\\ \underline{U_g}^1-R_1\underline{I_0}^1=\underline{U_0}^1\end{array}\right\}\;\underline{U_g}^1-R_1\underline{I_D}^1=(R_2+j\omega L)\,\underline{I_D}^1\Rightarrow$$

$$\underline{I_D}^1=\frac{\underline{U_g}^1}{R_1+R_2+j\omega L}=\frac{U e^{j0}}{R_1+R_2+j\omega L}$$

2) $\omega_2=4\pi f=2\omega$

$\theta^2=4\pi$

$$\left.\begin{array}{l}\underline{U_0}^2=\underline{U_D}^2\\ \underline{I_0}^2=\underline{I_D}^2\end{array}\right\}\;\underline{U_g}^2-R_1\underline{I_D}^2=(R_2+2j\omega L)\,\underline{I_D}^2\Rightarrow$$

$$\underline{I_D}^2=\frac{\underline{U_g}^2}{R_1+R_2+2j\omega L}=\frac{\frac{U}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{2}}}{R_1+R_2+2j\omega L}$$

$$\underline{I_D}=\underline{I_L}=\underline{I_D}^1+\underline{I_D}^2$$

$$\left.\begin{array}{l}i_{D1}(t)=\dfrac{\sqrt{2}U}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+(\omega L)^2}}\cos\left(\omega t-\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\omega L}{R_1+R_2}\right)\right)\\ i_{D2}(t)=\dfrac{U}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+(2\omega L)^2}}\cos\left(2\omega t-\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\omega L}{R_1+R_2}\right)\right)\\ i_L(t)=i_{D1}(t)+i_{D2}(t)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\underline{S_g}^1=\underline{U_g}^1\cdot\underline{I_D}^{1*}=P_g^1+jQ_g^1\\ \underline{S_g}^2=\underline{U_g}^2\cdot\underline{I_D}^{2*}=P_g^2+jQ_g^2\end{array}\right\}\;\boxed{P_g=P_g^1+P_g^2}$$

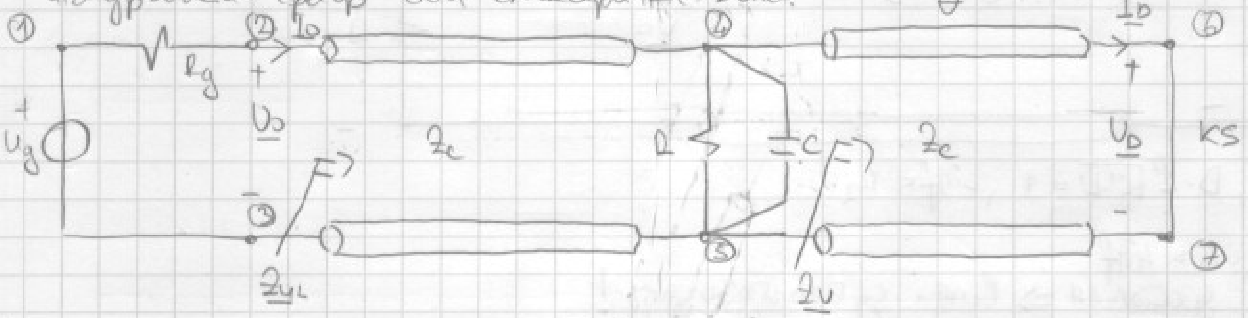
③ Вод и краткоспојени огранак су без губитака. Капацитивност кондензатора C и карактеристична импеданса Z_c су познати. Одзив је устаљен. Побуда је простопериодична. $u_g(t)=U_m\cos(\omega t)$, $Z_c=R_g$.

а) Одредити електричну дужину огранка θ и отпорност потрошача R тако да средња снага потрошача буде највећа могућа.

б) Одредити средњу снагу која се предаје воду за претходно одређену електричну дужину и отпорност.

в) Колики је коефицијент рефлексије на улазу вода за претходно одређену електричну дужину и отпорност.

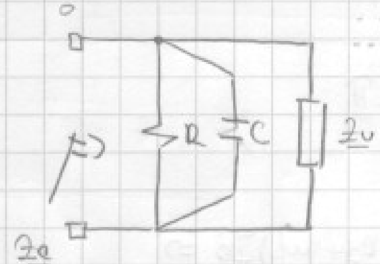
Нацртати граф овог електричног кола.



а)

$$\underline{Z_v}=\frac{\cos(\theta)\underline{U_D}+jZ_c\sin(\theta)\underline{I_D}}{jY_c\sin(\theta)\underline{U_D}+\cos(\theta)\underline{I_D}}=jZ_c\,tg(\theta)$$

0



$$\frac{1}{\underline{Z_e}}=\frac{1}{R}+j\omega C+\frac{1}{j\underline{Z_c}\,tg(\theta)}$$

$$\underline{Z_{ul}}=\frac{\underline{Z_e}\cos\theta+j\underline{Z_c}\sin\theta}{j\underline{Y_c}\cdot\underline{Z_e}\sin\theta+\cos\theta},\quad P_{max}\Rightarrow \underline{Z_{ul}}=R_g$$

$$j\frac{R_g\underline{Z_e}}{\underline{Z_c}}\sin\theta+R_g\cos\theta=\underline{Z_e}\cos\theta+j\underline{Z_c}\sin\theta$$

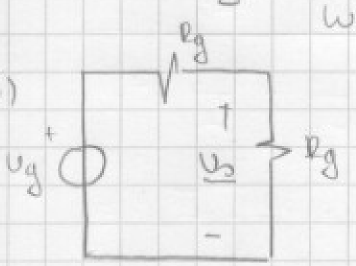
$$\cos\theta(\underline{Z_e}-R_g)=j\sin\theta(\underline{Z_e}-\underline{Z_c})$$

$$\sin\theta\neq\cos\theta\Rightarrow \boxed{\underline{Z_e}=R_g}$$

$$\frac{1}{R_g}=\frac{1}{R}+j\omega C+\frac{1}{j\underline{Z_c}\,tg(\theta)}\Rightarrow \boxed{R_g=R}\ \wedge\ j\omega C=\frac{j}{\underline{Z_c}\,tg(\theta)}$$

$$tg(\theta)=\frac{1}{\omega R_g C}\Rightarrow \boxed{\theta=arctg\frac{1}{\omega C R_g}+k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2\ldots}$$

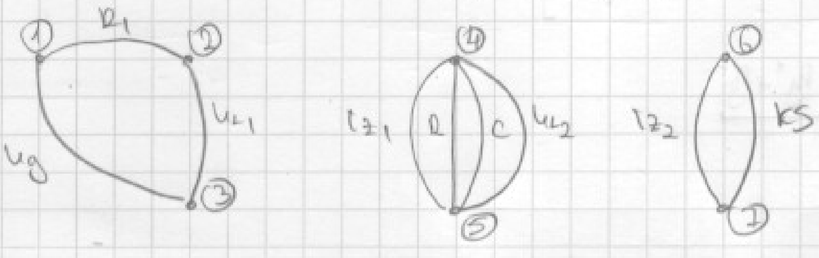
б)



$$\underline{U_0}=\frac{\underline{U_g}}{2}=\frac{U_m}{2\sqrt{2}}$$

$$S=\frac{U_0^2}{R_g}=\boxed{\frac{U_m^2}{8R_g}}$$

в)



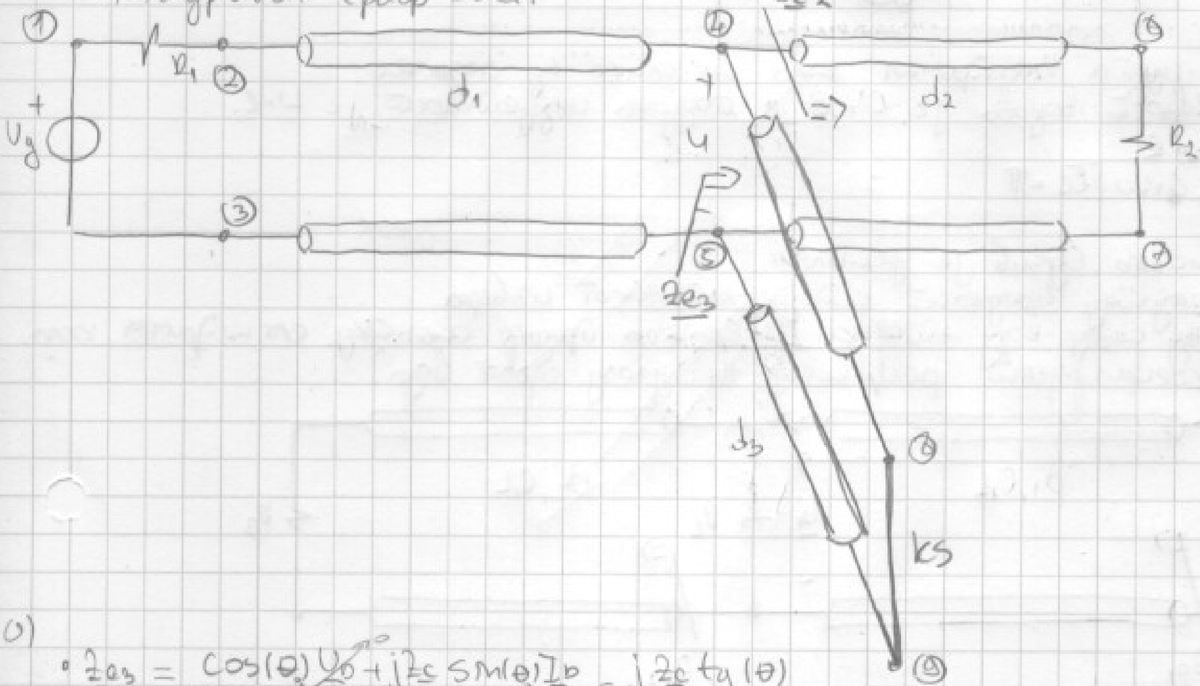
④ Водови електричног кола са слике су без губитака и имају исте параметре: подужна капацитивност је $C' = c$, а подужна индуктивност је $L' = l$. Одзив је устаљен. Побуда је $u_g = U_0 + \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t) + U_{m2}\cos(2\omega t)$

Постоји веза параметара $d_3 \omega \sqrt{cl} = \pi$.

а) одредити тренутну вредност напона на месту споја водова

б) одредити снагу отпорника R_2.

в) нацртати граф кола.



а)

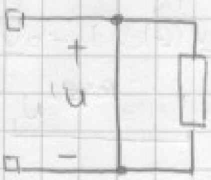
• $\underline{Z}_{e3} = \dfrac{\cos(\theta_3)\underline{U}_0 + j\underline{Z}_c \sin(\theta_3)\underline{I}_0}{j\underline{Y}_c \sin(\theta_3)\underline{U}_0 + \cos(\theta_3)\underline{I}_0} = j\underline{Z}_c\, tg(\theta)$

• $\underline{Z}_{e2} = \dfrac{R_2\cos(\theta_2) + j\underline{Z}_c \sin(\theta_2)}{j\underline{Y}_c R_2 \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)}$

1) $\underline{s} = 0$

• $\underline{Z}_{e3} = 0$

• $\underline{Z}_{e2} = R_2$

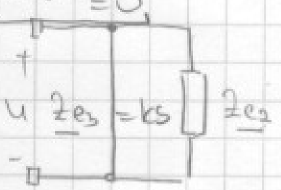


$\Rightarrow U^{(s=0)} = 0$

2) $\underline{s} = j\omega$

$\theta_3 = \beta \cdot d_3 = \omega\sqrt{LC} \cdot d_3 = \pi$

• $\underline{Z}_{e3} = 0 \Rightarrow U^{(\underline{s}=j\omega)} = 0$



3) $s = 2j\omega$

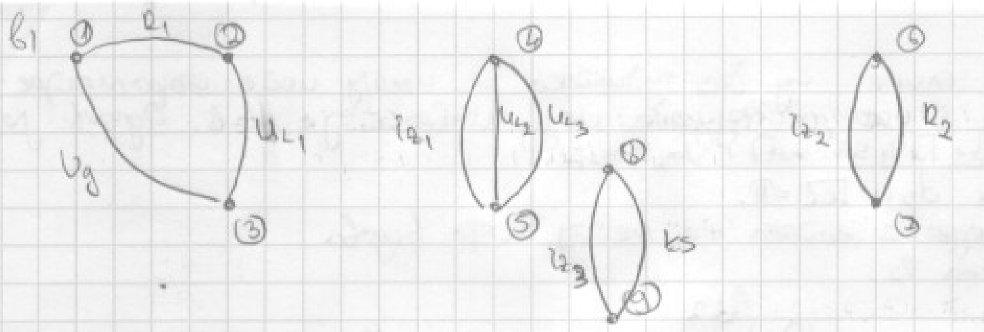
$\theta_3 = 2\pi$

• $\underline{Z}_{e3} = 0 \Rightarrow U^{(s=2j\omega)} = 0$

$\boxed{u(t) = 0}$

б) $\underline{U} = \cos\theta \underline{U}_0 + j\underline{Z}_c \sin(\theta)\underline{I}_0 \Rightarrow U_{R2} = 0 \Rightarrow \underline{P_{R2} = 0}$

в)



(5) Вредности елемената електричног кола са слике су познате. Подужна капацитивност водова је $C'=c$ а подужна индуктивност је $L'=l$.

$R_1=0.2R$, $R_2=R$, $R_3=R$

$l=4R^2c$, $d_1=2d_2$, $d_1\omega\sqrt{lc}=\pi$

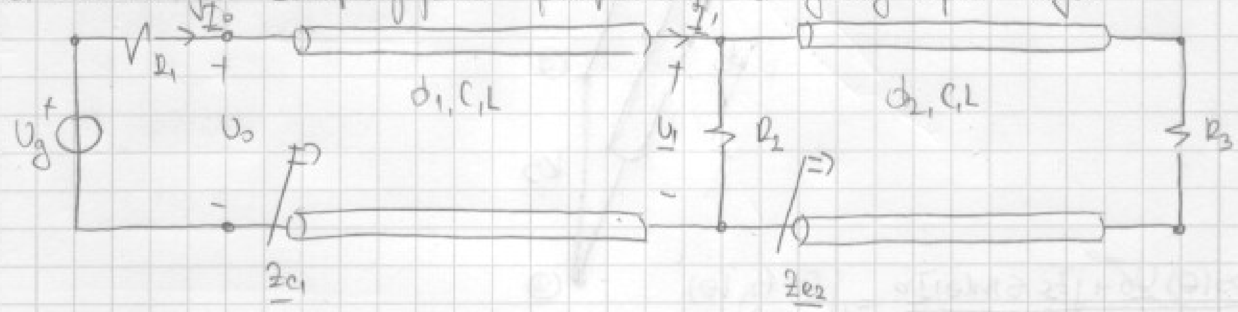
$u_g=\sqrt{2}U\sin(\omega t)$

Водови су без губитака. Одзив је устаљен.

а) Одредити тренутну вредност струје напонског извора

б) Одредити средњу снагу коју напонски генератор предаје остатку електричног кола

в) Колики је коефицијент рефлексије на улазу првог вода?



а) $$\underline{Z}_{e2}=\frac{R_3\cos(\theta_2)+j\underline{Z}_c\sin(\theta_2)}{jY_cR_3\sin(\theta_2)+\cos(\theta_2)},\quad \theta_2=d_2\cdot\omega\sqrt{l\cdot c}=\frac{\pi}{2}$$

$$\underline{Z}_{e2}=\frac{\underline{Z}_c^2}{R_3},\quad Z_c=\sqrt{\frac{l}{c}}\Rightarrow \underline{Z}_{e2}=\frac{l}{c\cdot R}=\frac{4R^2c}{c\cdot R}=4R$$

$$\underline{Z}_{e2}=4R$$

$$R_e=R_2\,||\,\underline{Z}_{e2}=0.8R$$

$$\underline{Z}_{e1}=\frac{\cos(\theta_1)R_e+j\underline{Z}_c\sin(\theta_1)}{jY_cR_e\sin(\theta_1)+\cos(\theta_1)},\quad \theta_1=d_1\cdot\omega\sqrt{lc}=\pi$$

$$\underline{Z}_{e1}=R_e=0.8R$$

$$\underline{I}_0=\frac{\underline{U}_g}{R_e+R_1}=\frac{\underline{U}_g}{R}$$

$$i_0(t)=\sqrt{2}\frac{U}{R}\sin(\omega t)$$

б) $$P_g=\frac{|\underline{U}_g|^2}{R}=\frac{U^2}{R}$$

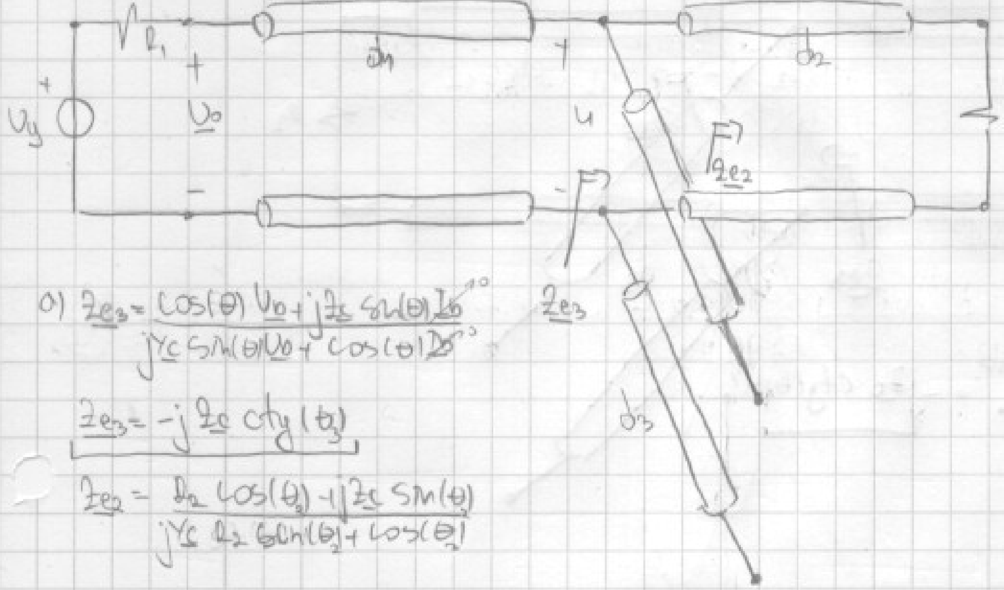
в) $$\underline{Z}_{c1}=\underline{Z}_{c2}=\underline{Z}_c=\sqrt{\frac{L'}{C'}}=2R$$

$$\rho(0)=\frac{\underline{Z}_p-\underline{Z}_c}{\underline{Z}_p+\underline{Z}_c}e^{-j2\theta_1}=\frac{\underline{Z}_{e1}-\underline{Z}_c}{\underline{Z}_{e1}+\underline{Z}_c}=\frac{0.8R-2R}{0.8R+2R}=-\frac{1.2}{2.8}=-\frac{3}{7}$$

• јануар 2014, Задатак 1:

Водови без губитака имају исте подужне параметре $C'=c$, $L'=l$. Поред веза параметара $R_1=R_2=\sqrt{l/c}$, $d_1=2d_3$, $2d_3\omega\sqrt{lc}=\pi$. Одзив је устаљен, а побуда је $u_g=U+U\sin(\omega t)+\sqrt{2}U\cos(2\omega t)$. Одредити:

а) тренутну вредност напона на месту споја
б) снагу отпорника R_2
в) ефективну вредност струје генератора



а) $\underline{Z_{e3}}=\dfrac{\cos(\theta)\underline{U_0}+j\underline{Z_c}\sin(\theta)\underline{I_0}}{j\underline{Y_c}\sin(\theta)\underline{U_0}+\cos(\theta)\underline{I_0}}$

$\underline{Z_{e3}}=-j\underline{Z_c}\operatorname{ctg}(\theta_3)$

$\underline{Z_{e2}}=\dfrac{R_2\cos(\theta_2)+j\underline{Z_c}\sin(\theta_2)}{j\underline{Y_c}R_2\sin(\theta_2)+\cos(\theta_2)}$

• $\omega=0$

$\underline{Z_{e3}}=\infty$
$\underline{Z_{e2}}=R_2$

$\left.\begin{aligned}\underline{U_0}&=\cos(\theta_1)\underline{U}+j\underline{Z_c}\sin(\theta_1)\underline{I}\\ \underline{I_0}&=j\underline{Y_c}\sin(\theta_1)\underline{U}+\cos(\theta_1)\underline{I}\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}\underline{U_0}&=\underline{U}\\ \underline{I_0}&=\underline{I}\end{aligned}\Rightarrow \underline{U_0}=\dfrac{U}{2}\Rightarrow u^{(0)}(t)=\dfrac{U}{2}$, $P_{R_2}^{(0)}=\dfrac{U^2}{4R_2}$

• ω

$\theta_3=\beta\cdot d_3=d_3\omega\sqrt{lc}=\dfrac{\pi}{2}$

$\underline{Z_{e3}}=0\Rightarrow u^{(\omega)}=0$, $P_{R_2}^{(\omega)}=0$

• 2ω

$\theta_3=2d_3\omega\sqrt{lc}=\pi$, $\theta_1=2\pi$

$\underline{Z_{e3}}=\infty$

$R_2=\underline{Z_c}=\sqrt{\dfrac{l}{c}}\Rightarrow$ вод је прилагођен $\Rightarrow \underline{Z_{e2}}=\underline{Z_c}=R_2$

$\underline{U_0}=\underline{U}$
$\underline{I_0}=\underline{I}$

$u^{(2\omega)}=\dfrac{\sqrt{2}U}{2}\cos(2\omega t)$, $P_{R_2}^{(2\omega)}=\dfrac{U^2}{2R_2}\cos^2(2\omega t)$

$u(t)=\dfrac{U}{2}+\dfrac{\sqrt{2}U}{2}\cos(2\omega t)$

б) $P_{R_2}=\dfrac{U^2}{4R_2}\left(1+2\cos^2(2\omega t)\right)=\dfrac{U^2}{4}\sqrt{\dfrac{c}{l}}\left(2+\cos(4\omega t)\right)$

$P_{R_2sr}=\dfrac{U^2}{2}\sqrt{\dfrac{c}{l}}$

в) $I_{eff}=\sqrt{\left(\dfrac{U}{2R_2}\right)^2+\left(\dfrac{U}{2R_1}\right)^2+\left(\dfrac{U}{2R_2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{U^2}{R_1^2}}=\dfrac{U}{R}=U\cdot\sqrt{\dfrac{c}{l}}$

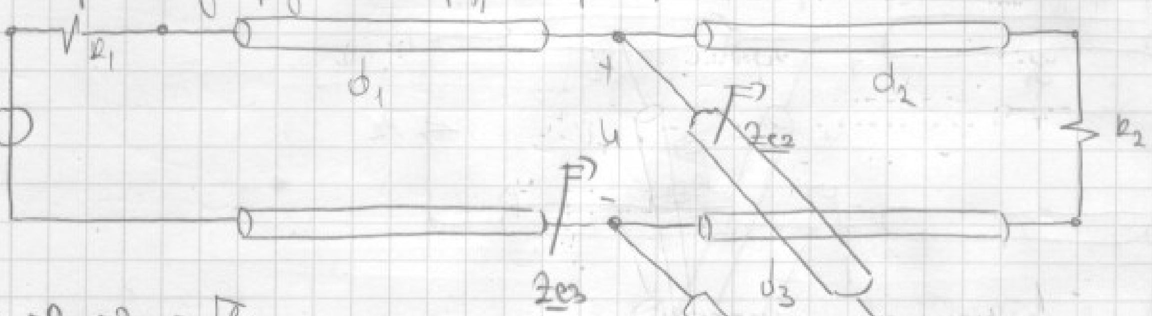
• Фебруар 2014, задатак 1:

Водови без губитака имају исте подужне параметре $C'=c$ и $L'=l$. Позната веза параметара $R_1=R_2=\sqrt{l/c}$, $d_1=3d_3$, $2d_3\omega\sqrt{cl}=\pi$. Одзив је устаљен, а познато је $u_g=U+U\sin(\omega t)+\sqrt{2}U\cos(3\omega t)$. Одредити:

а) тренутну вредност напона на месту вода

б) снагу отпорника R_2

в) ефективну вредност струје генератора.



а) $\underline{Z_{c1}}=\underline{Z_{c2}}=\underline{Z_{c3}}=\sqrt{\frac{l}{c}}$

$$\underline{Ze_3}=\frac{\cos(\theta)\underline{U_D}+j\underline{Z_c}\sin(\theta)\underline{I_D}}{j\underline{Y_c}\sin(\theta)\underline{U_D}+\cos(\theta)\underline{I_D}}=\boxed{-j\underline{Z_c}\,\mathrm{ctg}(\theta)}$$

$$\underline{Ze_2}=\frac{R_2\cos(\theta)+j\underline{Z_c}\sin(\theta)}{jR_2\underline{Y_c}\sin(\theta)+\cos(\theta)}$$

• $s_1=0$

$\underline{Ze_3}=\infty$

$\underline{Ze_2}=R_2$

$\underline{U_0}=\cos(\theta)\underline{U_D}+j\underline{Z_c}\sin(\theta)\underline{I_D} \Rightarrow \underline{U_0}=\underline{U_D}$

$\underline{I_0}=j\underline{Y_c}\sin(\theta)\underline{U_D}+\cos(\theta)\underline{I_D} \Rightarrow \underline{I_0}=\underline{I_D}$

$\underline{U_0}=\frac{R_2}{R_1+R_2}U=\boxed{\frac{U}{2}=u^{(0)}}$, $P_{R_2}^{(0)}=\frac{U^2}{4}\cdot\sqrt{\frac{c}{l}}$

• $s_2=j\omega$

$\theta_3=d_3\cdot\omega\sqrt{l\cdot c}=\frac{\pi}{2}$

$\underline{Ze_3}=0 \Rightarrow \boxed{u^{(\omega)}=0}$, $P_{R_2}^{(\omega)}=0$

• $s_3=3j\omega$

$\theta_3=3d_3\omega\sqrt{l\cdot c}=\pi$, $\theta_1=\frac{3\pi}{2}$

$\underline{Ze_3}=0 \Rightarrow \boxed{u^{(3\omega)}=0}$, $\boxed{P_{R_2}^{(3\omega)}=0}$

$\boxed{u(t)=\frac{U}{2}}$, $P_{R_2}(t)=\frac{U^2}{4}\sqrt{\frac{c}{l}}$

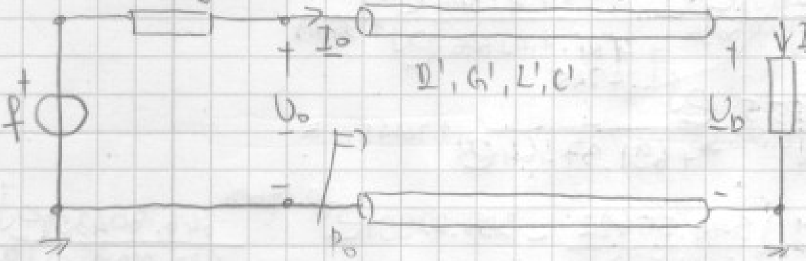
в) $\boxed{I_{eff}=\frac{U}{2}\sqrt{\frac{c}{l}}}$

• Јун / Јул 2014, задатак 1:

Примарни параметри енергетског вода су $R' = 0.08\ \Omega/km$, $L' = 1.34\ mH/km$, $C' = 8.6\ nF/km$, $G' = 37.5\ nS/km$. Дужина вода је 900 km. Одзив је устаљен и простопериодичан, учестаност је $f = 50\ Hz$. Вод је затворен потрошачем чија је средња (активна) снага $P = 100\ MW$. Сачинитељ (фактор) снаге је $\cos(\phi) = 1$, комплексни напон је $V = 220\ kV$.

Одредити:

1) комплексну струју генератора
2) средњу (активну) снагу на улазу вода
3) заменску П шему вода и вредности њених елемената



а) $\underline{U_0} = ch(\underline{\gamma} D)\underline{U_D} + \underline{Z_c}\, sh(\underline{\gamma} D)\underline{I_D}$

$\underline{I_0} = \underline{Y_c}\, sh(\underline{\gamma} D)\underline{U_D} + ch(\underline{\gamma} D)\underline{I_D}$

$R' = 8\cdot 10^{-5}\ \Omega/m$

$G' = 37.5\cdot 10^{-12}\ S/m$

$L' = 1.34\cdot 10^{-6}\ H/m$

$C' = 8.6\cdot 10^{-12}\ F/m$

$* \ \underline{Z} = x + jy = \sqrt{x^2+y^2}\, e^{j\,Arg\,\underline{Z}}$

$\underline{Z'} = R' + j\omega L' = 8\cdot 10^{-5} + j\cdot 420.97342\cdot 10^{-6} = 4.28507\cdot 10^{-4}\cdot e^{j1.383}$

$\underline{Y'} = G' + j\omega C' = 37.5\cdot 10^{-12} + j2.7017\cdot 10^{-9} = 2.70203\cdot 10^{-9}\cdot e^{j1.55692}$

$\underline{Z_c} = \sqrt{\dfrac{\underline{Z'}}{\underline{Y'}}} = \sqrt{\dfrac{4.28507\cdot 10^{-4} e^{j1.383}}{2.70203\cdot 10^{-9}\cdot e^{j1.55692}}} = \underline{398.22991\, e^{-j0.08696}}$

$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z'}\,\underline{Y'}} = \sqrt{4.28507\cdot 10^{-4}\cdot e^{j1.383}\cdot 2.70203\cdot 10^{-9} e^{j1.55692}} = \underline{1.07603\cdot 10^{-6} e^{j1.46996}}$

$\underline{P} = \underline{I_D}\cdot \underline{U_D}\cdot \cancel{\cos(\phi)} = \underline{I_D}\cdot\underline{U_D} \Rightarrow \underline{I_D} = 454.54545 A,\ \underline{U_D} = 220\cdot 10^3 V$

$\underline{I_0} = \dfrac{1}{\underline{Z_c}}\cdot sh(\underline{\gamma} D)\underline{U_D} + ch(\underline{\gamma} D)\underline{I_D}$, $\quad \underline{\gamma} D = 9\cdot 10^5\cdot 1.07603 e^{j1.46996}\cdot 10^{-6} = 0.96843 e^{j1.46996}$

$\cdot\ sh(\underline{\gamma} D) = \dfrac{e^{\underline{\gamma} D} - e^{-\underline{\gamma} D}}{2} = \dfrac{e^{0.96843 e^{j1.46996}} - e^{-0.96843 e^{j1.46996}}}{2} =$

$= \dfrac{e^{0.96843(0.10067 + j0.99492)} - e^{-0.96843(0.10067 + j0.99492)}}{2} = \dfrac{e^{0.09749}\cdot e^{j0.96351} - e^{-0.09749}\cdot e^{-j0.96351}}{2}$

$= \dfrac{1.1024(0.57064 + j0.8212) - 0.90711(0.57064 - j0.8212)}{2} = 0.05572 + j0.8251 = \underline{0.82698 e^{j1.50337}}$

$\cdot\ ch(\underline{\gamma} D) = \dfrac{e^{\underline{\gamma} D} + e^{-\underline{\gamma} D}}{2} = \dfrac{1.1024(0.57064 + j0.8212) + 0.90711(0.57064 - j0.8212)}{2} =$

$= 0.57335 + j0.08019 = \underline{0.57893 e^{j0.13896}}$

$\underline{I_0} = \dfrac{1}{398.22991}\cdot e^{j0.08696}\cdot 0.82698 e^{j1.50337}\cdot 220\cdot 10^3 + 0.57893 e^{j0.13896}\cdot 454.54545$

$\underline{I_0} = 456.86071\, e^{j1.59033} + 263.14999\cdot e^{j0.13896} =$

$= 456.86071(-0.01953 + j0.99981) + 263.14999(0.99036 + j0.13851)$

$= \underline{251.69073 + j493.22281\ [A]}$

б) $\underline{Z_u} = \dfrac{ch(\underline{\gamma} D)\underline{U_D} + \underline{Z_c}\, sh(\underline{\gamma} D)\underline{I_D}}{\frac{1}{\underline{Z_c}} sh(\underline{\gamma} D)\underline{U_D} + ch(\underline{\gamma} D)\underline{I_D}}$, $\quad \underline{U_D} = \underline{I_D}\cdot \underline{Z_p}$

$$\underline{Z_u} = \frac{\underline{Z_p}\,ch(\underline{\gamma}D) + \underline{Z_c}\,sh(\underline{\gamma}D)}{\frac{1}{\underline{Z_c}}\underline{Z_p}\,sh(\underline{\gamma}D) + ch(\underline{\gamma}D)} = \underline{Z_c}\,\frac{\underline{Z_p} + \underline{Z_c}\tanh(\underline{\gamma}D)}{\underline{Z_c} + \underline{Z_p}\tanh(\underline{\gamma}D)}$$

$$\underline{Z_p} = \frac{P}{I^2} = 484\,\Omega$$

$$\cdot \tanh(\underline{\gamma}D) = \frac{sh(\underline{\gamma}D)}{ch(\underline{\gamma}D)} = \frac{0.82698\,e^{j1.50337}}{0.57893\,e^{j0.13896}} = \underline{1.42846\,e^{j1.36441}}$$

$$\underline{Z_u} = 398.22991\,e^{-j0.08696}\,\frac{484 + 398.22991\,e^{-j0.08696}\cdot 1.42846\,e^{j1.36441}}{398.22991\,e^{-j0.08696} + 484\cdot 1.42846\,e^{j1.36441}}$$

$$\underline{Z_u} = 398.22991\,e^{-j0.08696}\,\frac{484 + 568.8555\,e^{j1.27745}}{398.22991\,e^{-j0.08696} + 691.37464\,e^{j1.36441}} =$$

$$= 398.22991\,e^{-j0.08696}\,\frac{648.48867 + j544.55492}{538.40458 + j642.11573} = 398.22991\,e^{-j0.08696}\,\frac{846.80435\,e^{j0.69985}}{837.96903\,e^{j0.87372}}$$

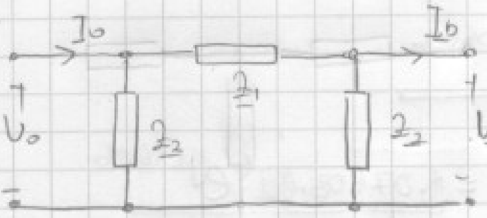
$$\underline{Z_u} = 402.42874\,e^{-j0.26148}$$

$$\underline{I_0} = 553.73005\,e^{j1.09894}$$

$$P_0 = |P_0| = |\underline{Z_u}\cdot\underline{I_0}^2| = |\,123.39148\,e^{j1.9364}\,|\ [MW]$$

$$\underline{P_0 = 123.39148\ [MW]}$$

b)



$$\underline{Z_1} = \underline{Z_c}\,Sh(\underline{\gamma}D)$$
$$\underline{Z_2} = \underline{Z_c}\,cth(\underline{\gamma}D/2)$$

$$\underline{Z_1} = 398.22991\,e^{-j0.08696}\cdot 0.82698\cdot e^{j1.50337} = 329.32817\,e^{j1.41641} = \underline{50.64203 + j325.4117\ [\Omega]}$$

$$\cdot sh(0.48422\cdot e^{j1.46996}) = \frac{e^{0.04874}\,e^{j0.48176} - e^{-0.04874}\,e^{-j0.48176}}{2} =$$

$$= 0.52498(0.88618 + j0.46334) - 0.47622(0.88618 - j0.46334) = 0.04321 + j0.4639$$

$$= 0.46591\,e^{j1.47792}$$

$$\cdot ch(0.48422\,e^{j1.46996}) = 0.52498(0.88618 + j0.46334) + 0.47622(0.88618 - j0.46334) = 0.88724 + j0.0226$$

$$= 0.88753\,e^{j0.02547}$$

$$\underline{Z_2} = 398.22991\,e^{-j0.08696}\cdot\frac{0.88753\,e^{j0.02547}}{0.46591\,e^{j1.47792}} = 758.60358\,e^{-j1.53941}$$

$$\underline{Z_2 = 23.80587 - j758.22996\ [\Omega]}$$

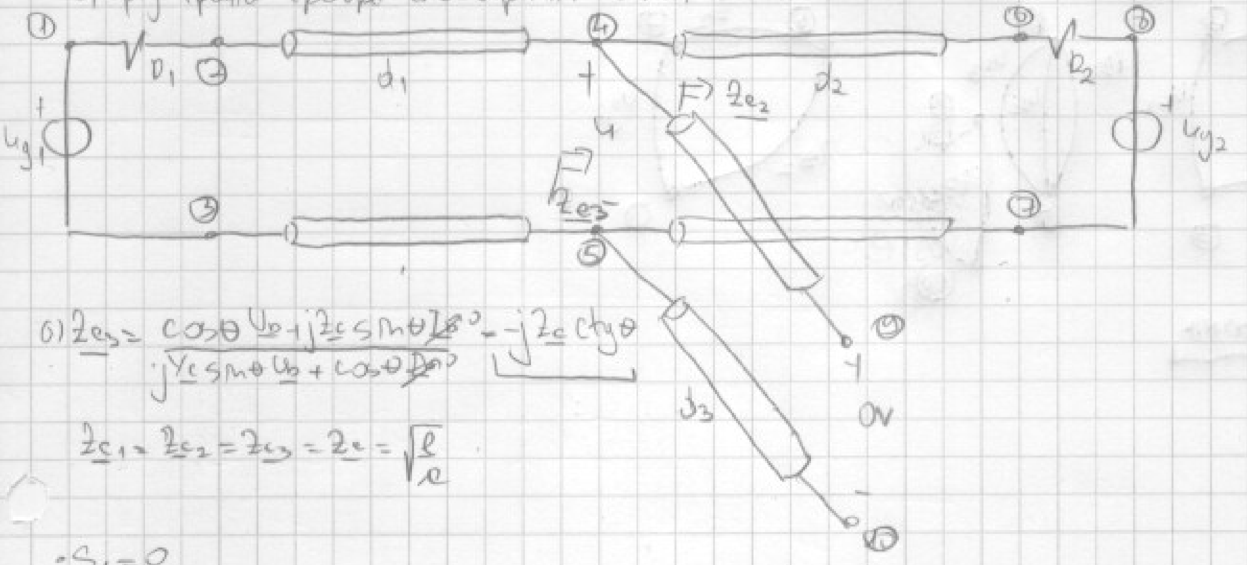
• септембар 2014, задатак 1:

Водови су без губитака и имају исте подужне параметре $C'=c$, $L'=l$. Познати вредности параметара $D_1=D_2=D_3=d$, $2d\omega\sqrt{lc}=\pi$, $R_1=R_2=\sqrt{l/c}$. Одзив је устаљен, а побуда је $u_{g1}=2U+\sqrt{2}U\cos(\omega t)$, $u_{g2}=\sqrt{2}U\cos(3\omega t)$. Одредити

а) тренутну вредност напона на месту споја

б) тренутну вредност напона отвореног вода

в) број грана графа електричног кола.



а) $\underline{Z}_{e3}=\dfrac{\cos\theta\,\underline{U}_0+j\underline{Z}_c\sin\theta\,\cancel{\underline{I}_0}}{j\underline{Y}_c\sin\theta\,\underline{U}_0+\cos\theta\,\cancel{\underline{I}_0}}=\boxed{-j\underline{Z}_c\,\mathrm{ctg}\,\theta}$

$\underline{Z}_{c1}=\underline{Z}_{c2}=\underline{Z}_{c3}=\underline{Z}_c=\sqrt{\dfrac{l}{c}}$

• $\underline{s}_1=0$

$\underline{Z}_{e3}=\infty$

$\underline{Z}_{e2}=\dfrac{R_2\cos\theta+j\underline{Z}_c\sin\theta}{j\underline{Y}_c\sin\theta+\cos\theta}$, $\theta=0\Rightarrow\underline{Z}_{e2}=R_2$

$\underline{Z}_{e2}=\underline{Z}_{c1}\Rightarrow\underline{Z}_{u1}=R_2$

$U^{(0)}=U_{R_2}=\dfrac{R_2}{R_1+R_2}U=\boxed{\dfrac{U}{2}}$

• $\underline{s}_2=j\omega\Rightarrow\theta_3=d\omega\sqrt{cl}=\dfrac{\pi}{2}$

$\underline{Z}_{e3}=0\Rightarrow U^{(\omega)}=0$

• $\underline{s}_3=3j\omega\Rightarrow\theta_3=3d\omega\sqrt{cl}=\dfrac{3\pi}{2}$

$\underline{Z}_{e3}=0\Rightarrow u^{(3\omega)}=0$

$\boxed{u(t)=\dfrac{U}{2}}$

б). $\underline{U}^{(0)}=\cos(\theta)\,\underline{U}_{ov}^{(0)}+j\underline{Z}_c\cancel{\sin(\theta)\,\underline{I}_{ov}^{(0)}}=\underline{U}_{ov}^{(0)}$

$U_{ov}^{(0)}=\dfrac{U}{2}$

• $\underline{I}^{(\omega)}=j\underline{Y}_c\sin\theta\,\underline{U}_{ov}+\cancel{\cos(\theta)\,\underline{I}_{ov}}=\dfrac{j}{\underline{Z}_c}\underline{U}_{ov}\Rightarrow\underline{U}_{ov}^{(\omega)}=-j\underline{Z}_c\underline{I}^{(\omega)}$

$\underline{U}_{ov}=-j\underline{Z}_c\underline{I}^{(\omega)}$

$\underline{U}_0=\cancel{\cos(\theta)\,\underline{U}}+j\underline{Z}_c\sin(\theta)\,\underline{I}=j\underline{Z}_c\underline{I}$, $U_0=\sqrt{2}U\cos(\omega t)$

$\underline{I}=\dfrac{\sqrt{2}U\cos(\omega t)}{j\underline{Z}_c}\Rightarrow\underbrace{\underline{U}_{ov}^{(\omega)}=-\sqrt{2}U\cos(\omega t)}$

• $\underline{I}^{(3\omega)}=j\underline{Y}_c\sin(\theta)\,\underline{U}_{ov}+\cancel{\cos(\theta)\,\underline{I}_{ov}}=-\dfrac{j}{\underline{Z}_c}\underline{U}_{ov}\Rightarrow\underline{U}_{ov}=j\underline{Z}_c\underline{I}^{(3\omega)}$

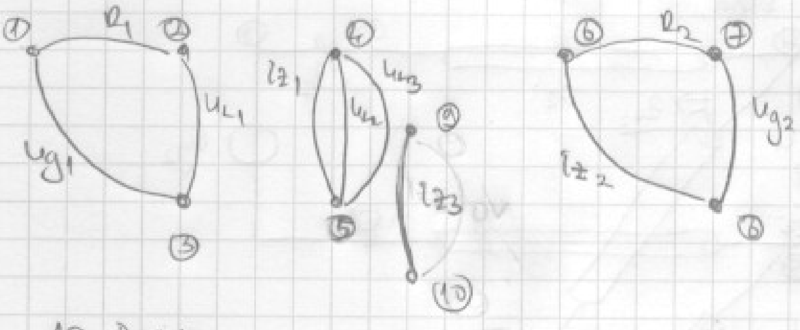
$\underline{U_0} = \cos(\underset{0}{\cancel{\theta}})\,\underline{U} + jZ_c \sin(\theta)\,\underline{I} = -jZ_c\,\underline{I}^{(3\omega)}, \quad \underline{U_0} = \sqrt{2}U\cos(3\omega t)$

$$\underline{I}^{(3\omega)} = \frac{\sqrt{2}U}{-jZ_c}\cos(3\omega t)$$

$$U_{0r}^{(3\omega)} = -\sqrt{2}U\cos(3\omega t)$$

$$\underline{U_{0r}(t) = U - \sqrt{2}U\cos(\omega t) - \sqrt{2}U\cos(3\omega t)}$$

б)



10 грана