OPŠTA TEORIJA ELEKTRIČNIH MAŠINA

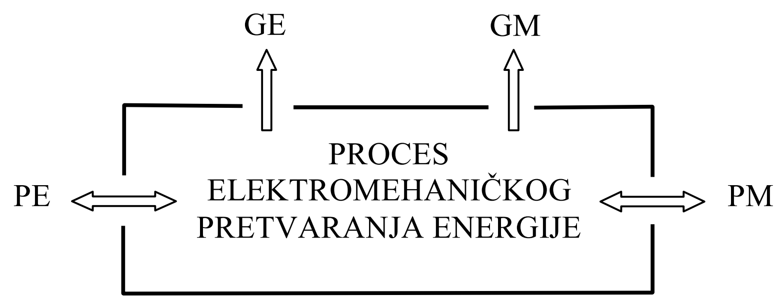
SADRŽAJ

1 OPŠTA TEORIJA ELEKTRIČNIH MAŠINA

Cilj ovog poglavlja je da se, polazeći od opšte definicije električne mašine kao *fizičkog objekta*, dođe do opšteg *apstraktnog oblika* koji treba da bude njegova zamena, verna i pogodna za proučavanje a ujedno i efikasna za primenu.

1.1 Opšti fizički model električne mašine

Električnu mašinu posmatramo kao zatvoreni, ali pristupačni fizički objekt u kome se odigrava proces pretvaranja (konverzije) električne energije u mehaničku i obrnuto. Mašinu ćemo posmatrati kao "crnu kutiju", bez ulaženja u konstrukcione detalje i fizički izgled. Preko elekričnog i mehaničkog prolaza mašina je spojena sa spoljnim objektima, izmenjujući sa njima električnu, odnosno mehaničku energiju. Prolazi mogu da imaju ulogu i ulaza i ulogu izlaza. U normalnim radnim stanjima jedan prolaz je ulaz, a drugi izlaz. Pored ove veze, postoji i neželjena (jednosmerna) veza preko izlaza za električne i mehaničke gubitke. Opšti fizički model se može predstaviti kao crna kutija koja ima dva glavna (dvosmerna) prolaza $-\mathrm{PE}$ za električnu i PM za mehaničku energiju i dva sporedna (jednosmerna) izlaza za električne gubitke GE i mehaničke gubitke GM. Opšta teorija ima za cilj da procese elektromehaničkog pretvaranja energije unutar ove crne kutije modeluje odgovarajućim jednačinama.



Slika 1-1 Električna mašina predstavljena kao crna kutija

U analizi električnih mašina, koja sledi, koristićemo sledeće idealizacije:

- pojave se dovoljno se tačno opisuju primenom koncentrisanih parametara, tj. odabraćemo pristup analize preko kola;
- pojave kapacitivnog karaktera su zanemarljive, tj. nećemo razmatrati pojave pri visokim naponima i učestanostima;
- gubici u magnetnom kolu su zanemarljivi;
- zavisnost između fluksova i struja je linearna, tj. smatraćemo da je karakteristika magnećenja linearna, odnosno nećemo uzeti u obzir pojavu magnetnog zasićenja;
- momenat inercije rotirajućih masa je konstantan.

Za sve veličine koristiće se oznake sa malim slovima, jer se u opštem slučaju radi o trenutnim vrednostima (vremenski domen). Posmatraćemo obrtne električne mašine. *Usvojeno je da je snaga pozitivna kada ulazi u mašinu.*

1.1.1 Mehanički prolaz PM

Električna mašina se sastoji od dva čvrsta tela (stator i rotor) čiji se međusobni položaj može menjati sa jednim stepenom slobode. Relativni položaj između ta dva tela izražava se jednom promenljivom veličinom, koja je ugao ako se radi o rotaciji ili dužina ako se radi o translaciji. Stator je u principu nepokretan, tako da ova promenljiva daje istovremeno i relativni položaj rotora u odnosu na okolinu.

Mehanička snaga koja se na ovom prolazu dovodi je:

$$p_m = \omega_m \, m_m \ ,$$

gde je m_m spoljašnji mehanički moment, a ω_m mehanička ugaona brzina obrtanja rotora. Mehanička snaga je pozitivna ako se dovodi na vratilo (generatorski režim rada električne mašine).

Mehanička ugaona brzina rotora u odnosu na stator definisana je sa:

$$\omega_m = \frac{\mathrm{d}\vartheta_m}{\mathrm{d}t} \ ,$$

gde je ϑ_m ugao između nepokretne ose statora i ose na rotoru (mehanička koordinata), a t vreme.

Pored toga je $\omega_m = 2\pi\, n/60$, gde je n brzina obrtanja rotora u obrtajima u minuti.

Energija koja u vremenskom intervalu $[t_0,\, t_1]$ prođe kroz mehanički prolaz PM određena je sa:

$$W_m = \int_{t_0}^{t_1} p_m \,\mathrm{d}t \ .$$

1.1.2 Električni prolaz PE

Električna mašina sadrži određen broj prostih električnih kola (namotaja) koja su međusobno galvanski izolovana, ali magnetno spregnuta. Namotaji su nepokretni u odnosu na stator (statorski namotaji) ili u odnosu na rotor (rotorski namotaji), a može ih biti obeju vrsta.

Električna snaga koja se preko para krajeva bilo kog namotaja u datom trenutku dovodi ili odvodi može se izraziti kao:

$$p_{ei} = i_i \, u_i \qquad i = 1, 2, 3, ..., n$$

gde je n ukupan broj namotaja a i_i i u_i su struja i napon i-tog namotaja.

Prema usvojenoj konvenciji električna snaga je pozitivna za motorski režim rada.

Ukupna električna snaga jednaka je algebarskom zbiru snaga svih namotaja:

$$p_e = \sum_1^n i_i \, u_i \ .$$

Energija koja u vremenskom intervalu $[t_0, t_1]$ prođe kroz električni prolaz PE je:

$$W_e = \int_{t_0}^{t_1} p_e \, \mathrm{d}t \ .$$

Između struje i napona postoji veza koja se opisuje zakonom naponske ravnoteže i zakonom elektromagnetske indukcije. Za svaki namotaj važi jednačina naponske ravnoteže:

$$u_i = R_i \, i_i + \frac{\mathrm{d}\psi_i}{\mathrm{d}t} ,$$

gde je

$\psi_i = \sum_{k=1}^{n} L_{ik} \, i_k$ ukupni magnetski fluks (fluksni obuhvat) namotaja usled proticanja struja kroz sve namotaje,

R_i - otpornost i-tog namotaja,

L_{ii} - sopstvena induktivnost i-tog namotaja,

L_{ik} - međusobna induktivnost i-tog i k-tog namotaja.

Uvođenjem matrične notacije imamo:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & .. & i_n \end{bmatrix}^+, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & .. & u_n \end{bmatrix}^+, \quad \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & .. & \psi_n \end{bmatrix}^+,$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & & & \\ & R_2 & & \\ & & \vdots & \\ & & & R_n \end{bmatrix} = diag\left(R_1, R_2, ..., R_n\right) , \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & .. & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & .. & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & .. & L_{n4} \end{bmatrix}$$

dobija se matrična forma jednačina koja opisuje električni prolaz:

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{i}^+ \, \mathbf{u} \ ;$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}}{\mathrm{d}t} ;$$

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{L}\,\mathbf{i} ;$$

gde $+$ označava transpoziciju matrice ili vektora (sa konjugacijom kod kompleksnih).

U najopštijem slučaju naponi i struje su kompleksne promenljive vremena, zbog čega bi u jednačini za električnu snagu postojala osim transpozicije i kompleksna konjugacija vektora struje.

1.1.3 Mehanički izlaz GM

Mehanički gubici su posledica trenja u ležištima i trenja pokretnih delova mašine o vazduh ili uopšte o okolni fluid i obično se nazivaju gubicima trenja i ventilacije. Snaga mehaničkih gubitaka obično se može približno predstaviti kao:

$$g_m = K_m \, \omega_m^2 ,$$

gde je K_m konstantan ili promenljiv koeficijent trenja.

1.1.4 Električni izlaz GE

Električni gubici nastaju u provodnicima usled Džulove toplote, kao posledica proticanja struje kroz namotaje pretvarača.

Gubici u svakom od namotaja su:

$$g_{ei} = R_i \, i_i^2$$

tako da su ukupni gubici

$$g_e = \sum_{1}^{n} R_i \, i_i^2$$

ili u matričnom obliku:

$$g_e = \mathbf{i}^{+} \, \mathbf{R} \, \mathbf{i} .$$

Kao što je već napomenuto, zanemarićemo uticaj gubitaka u magnetnom kolu, budući da ih je teško analitički uzeti u obzir, jer se pristup prikazu mašine bazira na posmatranju električnih kola.

1.2 Energetski bilans

Prema zakonu o održanju energije, celokupna energija koja u određenom vremenskom intervalu uđe u mašinu mora da bude jednaka zbiru svih gubitaka energije i priraštaju energije akomulisane u mašini. Posmatrajmo bilans u toku vrlo kratkog vremenskog intervala, tako da se sve snage mogu za taj interval smatrati konstantnim. Tada važi:

$$p_m \, \mathrm{d}t + p_e \, \mathrm{d}t = g_m \, \mathrm{d}t + g_e \, \mathrm{d}t + \mathrm{d}a_m + \mathrm{d}a_e ,$$

gde su a_m i a_e akomulisana mehanička i električna energija, a $\mathrm{d}a_m$ i $\mathrm{d}a_e$ su odgovarajući priraštaji. Iz prethodne jednačine, za snagu imamo:

$$p_m + p_e = g_m + g_e + \mathrm{d}a_m / \mathrm{d}t + \mathrm{d}a_e / \mathrm{d}t .$$

1.2.1 Mehanička akumulacija

Mehanička akumulacija je kinetička energija masa koje se obrću i iznosi:

$$a_m = \frac{1}{2} J_m \, \omega_m^2 ,$$

gde je J_m momenat inercije rotirajućih masa. U ovoj analizi, kao što je već rečeno, smatraćemo da je moment inercije električne mašine konstantan. U praksi mogu nastupiti slučajevi kada je momenat inercije pokretnih delova van mašine, pa prema tome i ekvivalentni momenat inercije J_m promenljiv, npr. kod elektromotornih pogona namotavača ili centrifuga, što se u ovom stepenu razvoja modela ne uzima u obzir.

Priraštaj mehaničke akumulacije pri maloj promeni brzine je prema tome:

$$\mathrm{d}a_m = J_m\, \omega_m\, \mathrm{d}\omega_m .$$

1.2.2 Električna akumulacija

Električna akumulacija je prema zakonima elektromagnetike:

$$a_e = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} i_i\, \psi_i \quad ,$$

ili u matričnom obliku

$$a_e = \frac{1}{2}\mathbf{i}^+\, \boldsymbol{\psi} .$$

Za linearna magnetna kola (nema magnetnog zasićenja), akumulisana energija je

$$a_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i_i \sum_{k=1}^{n} L_{ik}\, i_k \ ,$$

ili u matričnom obliku

$$a_e = \frac{1}{2}\mathbf{i}^+\, \mathbf{L}\, \mathbf{i} \ .$$

Priraštaj akumulacije je:

$$\mathrm{d}a_e = \frac{1}{2}\mathbf{i}^+\, \mathrm{d}\boldsymbol{\psi} + \frac{1}{2}\mathrm{d}\mathbf{i}^+\ \boldsymbol{\psi} = \frac{1}{2}\mathbf{i}^+\mathrm{d}\mathbf{L}\ \mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{i}^+\ \mathbf{L}\ \mathrm{d}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\ \mathrm{d}\mathbf{i}^+\ \mathbf{L}\ \mathbf{i}$$

što se u slučaju magnetne linearnosti može svesti na jednostavniji oblik:

$$\mathrm{d}a_e = \frac{1}{2}\mathbf{i}^+\, \mathrm{d}\mathbf{L}\ \mathbf{i} + \mathbf{i}^+\ \mathbf{L}\ \mathrm{d}\mathbf{i} .$$

pošto je matrica induktivnosti $\mathbf{L}$ simetrična, tj. vredi $\mathbf{L} = \mathbf{L}^+$.

1.2.3 Elektromehaničko pretvaranje energije

Snaga elektromehaničkog pretvaranja (konverzije) energije, p_c se dobija iz:

$$p_c = p_e - g_e - \mathrm{d}a_e / \mathrm{d}t = -\, p_m + g_m + \mathrm{d}a_m / \mathrm{d}t .$$

Uz zamenu izraza za pojedine električne snage i uzimajući u obzir jednačinu naponske ravnoteže $\mathbf{u} = \mathbf{R}\,\mathbf{i} + \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}}{\mathrm{dt}}$ imamo:

$$p_c = \frac{1}{2}\left(\mathbf{i}^+ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{i}^+}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\psi} \right).$$

Zamenom $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{L}\,\mathbf{i}$, konačno imamo:

$$p_c = \frac{1}{2}\,\mathbf{i}^+ \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{i}\,.$$

Induktivnosti mašine mogu da zavise od vremena posredno, preko koordinate položaja rotora, $\vartheta_m = \int \omega_m \,\mathrm{d}t$, zbog čega je:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}\vartheta_m}\frac{\mathrm{d}\vartheta_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}\vartheta_m}\omega_m\,.$$

Uz zamenu izraza za pojedine mehaničke snage, za snagu elektromehaničkog pretvaranja imamo:

$$p_c = -\,\omega_m m_m + K_m \omega_m^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J_m\,\omega_m^2\right).$$

Momenat konverzije (elektromagnetni obrtni moment), m_c, se može definisati preko snage konverzije izrazom:

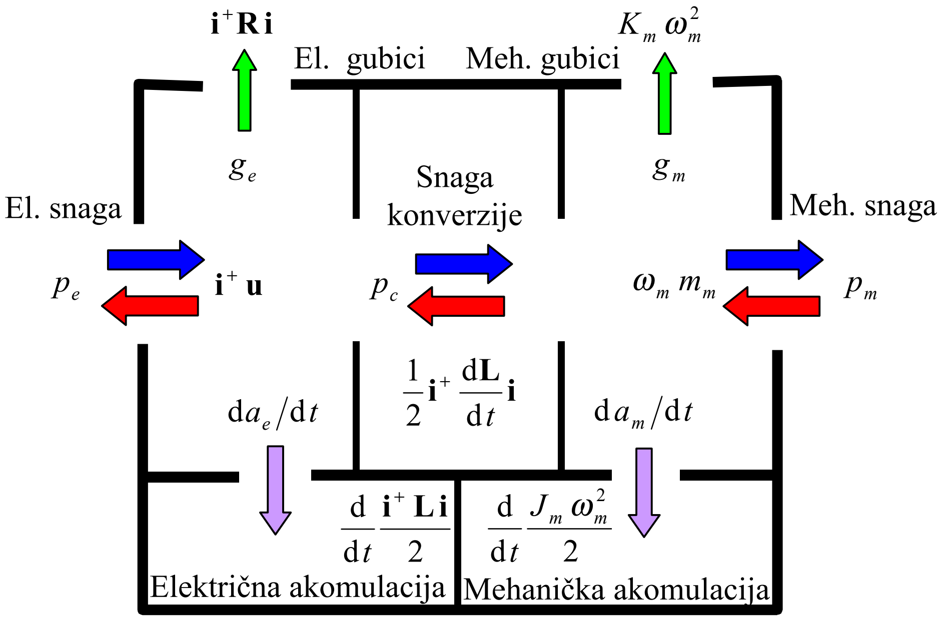
$$p_c = \omega_m\, m_c\,.$$

Iz prethodnih jednačina za snagu konverzije, za moment konverzije važi:

$$m_c = \frac{1}{2}\,\mathbf{i}^+ \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}\vartheta_m}\mathbf{i}\ ,$$

odnosno

$$m_c = -\,m_m + J_m \frac{\mathrm{d}\omega_m}{\mathrm{d}t} + K_m\omega_m\ .$$



Slika 1-2 Energetski bilans električne mašine izražen induktivnostima i snagama

Na osnovu izvedenih relacija, za osnovni matematički model obrtne električne mašine imamo:

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\,\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}}{\mathrm{dt}};$$

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{L}\,\mathbf{i};$$

$$m_m = J_m \frac{\mathrm{d}\omega_m}{\mathrm{d}t} + K_m \omega_m - m_c;$$

$$m_c = \frac{1}{2}\,\mathbf{i}^{+} \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}\vartheta_m}\,\mathbf{i};$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta_m}{\mathrm{d}t} = \omega_m .$$

1.3 Parametri

Parametri osnovnog matematičkog modela su: K_m, J_m, R i L. Od posebnog značaja su induktivnost L i međuinduktivnost M, sakupljene u matrici induktivnosti $\mathbf{L}$. Vrsta elekrične mašine određuje pojedine elemente matrice $\mathbf{L}$. U izlaganju koje sledi biće razrađene osobine ovih induktivnosti i dati opšti obrasci za izražavanje njihove zavisnosti od položaja rotora i drugih relevantnih veličina.

Razdelimo navoje mašine na statorske i rotorske. Sada za matrice otpornosti i induktivnosti imamo:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \\ & \mathbf{R}_r \end{bmatrix}, \ \mathbf{R} = diag\left(\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_r\right),$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ss} & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{rs} & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix}.$$

Dijagonalne submatrice matrice induktivnosti su kvadratne i simetrične: $\mathbf{L}_{ss} = \mathbf{L}_{ss}^{T}$.

Nedijagonalne submatrice matrice induktivnosti su u opštem slučaju pravouglene, dimenzija (s,r) i (r,s), nesimetrične, ali međusobno simetrične: $L_{sr}^{ik} = L_{rs}^{ki}$, tj. $\mathbf{L}_{sr} = \mathbf{L}_{rs}^{+}$, gde je i indeks vrste, a k indeks kolone.

Prema zakonima elektromagnetike može se međuinduktivnost bilo kog para navoja, odnosno samoinduktivnost jednog navoja napisati u obliku:

$$L_{xy}^{ik} = f_{xy}^{ik}\left(\vartheta_m, \gamma_{xm}^{i}, \gamma_{ym}^{k}\right)\mu_{xy}^{ik}\, l_{xy}^{ik}\, N_x^{i}\, N_y^{k},$$

gde je

x, y može da bude s ili r,

f - funkcija položaja,

ϑ_m - koordinata položaja rotora u odnosu na stator,

γ_{xm}^{i} - koordinata koja određuje položaj navoja i na statoru $(x=s)$ ili rotoru $(x=r)$ u odnosu na statorsku $(y=s)$ ili rotorsku $(y=r)$ osu,

μ - osobina sredine,

l - geometrija i dimenzije sredine,

N - broj (evi) navojaka navoja statora odnosno rotora.

1.3.1 Osobine funkcije induktivnosti L

1. Funkcija f, odnosno L_{xy}^{ik}, je PERIODIČNA u odnosu na ϑ_m i γ_m.

Posle svakog punog okretaja rotora ili posle svakog (zamišljenog) punog okretaja posmatranog navoja oko obrtne ose pri nepokretnom rotoru, čitav elektromagnetni sistem je isti kao pre okretaja.

2. Osobina VIŠEPOLNOSTI

Perioda funkcije L je 2π s obzirom na promeljive ϑ i γ, gde su:

$\vartheta = P\vartheta_m$ i $\gamma = P\gamma_m$. Broj P nazivaćemo periodnim brojem mašine, a promenljive ϑ i γ električnim koordinatama rotora, odnosno navoja, ili jednostavno, električnim uglovima. Broj P se u određenim slučajevima poklapa sa brojem pari polova.

Kada se u jednačine osnovnog matematičkog modela uvedu električne koordinate, dobija se sledeći model:

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\,\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}}{\mathrm{dt}};$$

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{L}(\vartheta)\,\mathbf{i};$$

$$m_m = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + K\omega - Pm;$$

$$m = \frac{1}{2}\,\mathbf{i}^{+}\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}\vartheta}\mathbf{i};$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = \omega;$$

gde je: $m = \frac{m_c}{P}$, $K = \frac{K_m}{P}$, $J = \frac{J_m}{P}$ i $\omega = P\omega_m$.

Kada se radi o višepolnom navoju, njegove polne sekcije su vezane redno, tako da struja u njima proizvodi flukseve usmerene na isti način.

3. JEDNOSTRANA ISTURENOST

Funkcije L_{rr}^{ik} (rotorske induktivnosti) ne zavise od ϑ (položaja rotora prema statoru) ako je stator cilindričan i gladak (bez žljebova) bez obzira na oblik rotora: $L_{rr}^{ik} \neq f(\vartheta)$.

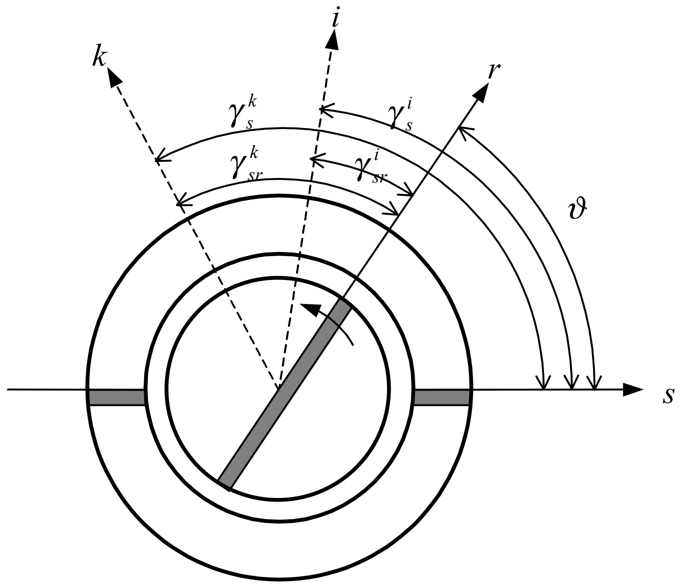
IDEALIZACIJA: Zanemaruje se uticaj žljebova i zubaca statora na induktivnost.

Izraz za rotorske induktivnosti preko dvostrukog Furijeovog reda:

$$L_{rr}^{ik}\left(\gamma_r^i,\gamma_r^k\right)=\sum_m\sum_n L_{rr,mn}^{ik}\left(\gamma_r^i,\gamma_r^k\right) \qquad \gamma_r^i,\gamma_r^k \neq f(\vartheta)$$

$$L_{rr,mn}^{ik}\left(\gamma_r^i,\gamma_r^k\right)=A_{rr,mn}^{ik}\cos\left(m\gamma_r^i\right)\cos\left(n\gamma_r^k\right)+B_{rr,mn}^{ik}\cos\left(m\gamma_r^i\right)\sin\left(n\gamma_r^k\right)+$$
$$+C_{rr,mn}^{ik}\sin\left(m\gamma_r^i\right)\cos\left(n\gamma_r^k\right)+D_{rr,mn}^{ik}\sin\left(m\gamma_r^i\right)\sin\left(n\gamma_r^k\right)$$

gde su A, B, C i D odgovarajući Furijeovi koeficijenti. Poznavanje ovih koeficijenata nije bitno za sledeće izlaganje.



Slika 1-3 Geometrijski prikaz koordinata rotora i navoja (oba na statoru)

4. Osobina JEDNOOSNE SIMETRIČNOSTI

Funkcija L_{rr}^{ik} je parna s obzirom na obe promenljive (koordinate) $\gamma_r^i\ \gamma_r^k$, tj. važi:

$$L_{rr}^{ik}\left(-\gamma_r^i,-\gamma_r^k\right)=L_{rr}^{ik}\left(\gamma_r^i,\gamma_r^k\right)$$

U ovom slučaju su Furijeovi koeficijenti B i C jednaki nuli.

Kada se uvede uslov parnosti i primene odvarajući trigonometrijski obrasci, imamo OSNOVNU FORMULU INDUKTIVNOSTI:

$$L_{xy,mn}^{ik}\left(\gamma_r^i,\gamma_r^k\right)=M_{xy,mn}^{ik}\cos\left(m\gamma_{xr}^i-n\gamma_{yr}^k\right)+N_{xy,mn}^{ik}\cos\left(m\gamma_{xr}^i+n\gamma_{yr}^k\right),\ m,\ n=0,1,...$$

Koordinate u prethodnom izrazu se izražavaju (mere) u odnosu na rotor!

Koeficijent $N=0$ za mašinu sa ravnomernim procepom (cilindrični stator i rotor).

IDEALIZACIJA: pretpostavlja se da je fluks (obrtno magnetno polje) u zazoru sinusan, tj. zanemaruju se prostorni harmonici.

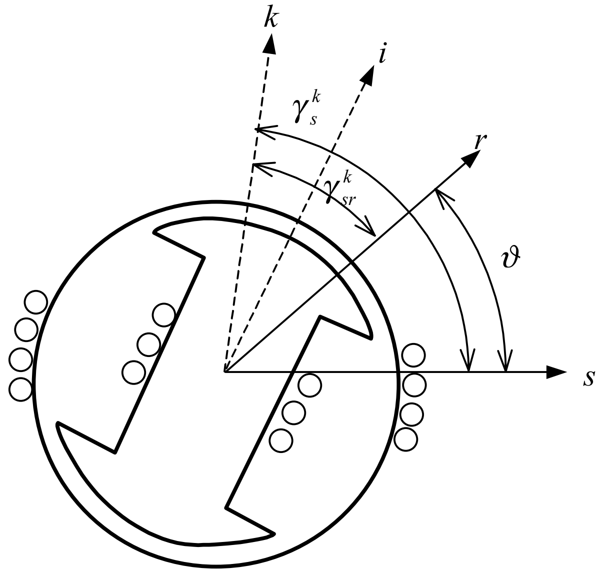
Preciznije rečeno, uzet je u obzir SAMO OSNOVNI HARMONIK dvostrukog Furijovog reda ($m = n = 1$):

$$L_{xy}^{ik}\left(\gamma_r^i,\gamma_r^k\right)=M_{xy}^{ik}\cos\left(\gamma_{xr}^i-\gamma_{yr}^k\right)+N_{xy}^{ik}\cos\left(\gamma_{xr}^i+\gamma_{yr}^k\right)$$

što je za većinu praktičnih primena zadovoljavajuće.

1.3.2 Primer određivanja funkcije induktivnosti

1. Po jedan navoj na rotoru i statoru



Slika 1-4 Primer električne mašine sa po jednim navojem na rotoru (*i*) i statoru (*k*)

Osa rotora (r) ne mora da se poklapa sa osom navoja na rotoru. Ona je čisto vezana za rotor.

Svi uglovi se svode na rotorsku referentnu osu.

$$L_{rs}^{ik}=M_{rs}^{ik}\cos\left(\gamma_r^i-\gamma_{sr}^k\right)+N_{rs}^{ik}\cos\left(\gamma_r^i+\gamma_{sr}^k\right)$$

gde je γ_s^k zapravo γ_{ss}^k, a γ_r^i zapravo γ_{rr}^i.

uz $\gamma_{sr}^k=\gamma_s^k-\vartheta$ imamo:

$$L_{rs}^{ik}=M_{rs}^{ik}\cos\left[\vartheta-\left(\gamma_s^k-\gamma_r^i\right)\right]+N_{rs}^{ik}\cos\left[\vartheta-\left(\gamma_s^k+\gamma_r^i\right)\right]$$

Kod člana uz N iskorišteno je svojstvo parnosti kosinusne funkcije, tj. $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

2. oba navoja na statoru

$$\gamma_{sr}^i=\gamma_s^i-\vartheta$$

$$L_{ss}^{ik}=M_{ss}^{ik}\cos\left[\gamma_s^i-\gamma_i^k\right]+N_{ss}^{ik}\cos\left[2\vartheta-\left(\gamma_s^i+\gamma_s^k\right)\right]$$

Važno je primetiti da ako mašina ima ravnomerni procep ($N=0$) i ako su navoji i i k električno pomereni za $\pi/2$ onda je međuinduktivnost $L_{rs}^{ik}=0$, tj. ne pojavljuje se ovaj član u matrici induktivnosti.

Drugim rečima, ako nekom transformacijom postavimo navoje u položaj sa međusobnim uglom od $\pi/2$ i ako takođe procep učinimo ravnomernim, onda je $L_{sr}^{ik}=0$, odnosno navoji više nisu spregnuti.

1.3.3 Induktivnost višefaznih namotaja

Sledećom dopunom definicije električne mašine se sužava klasa mašina koje se proučavaju.

DEFINICIJA: Navoji električne mašine su grupisani u višefazne namotaje. Višefazni namotaj je grupa navoja na statoru ili grupa navoja na rotoru koja ima sledeće osobenosti:

1. svi navoji su jednaki,
2. ose ma kojeg para navoja razmaknute su za električni ugao koji je celobrojni deo punog ugla ili celobrojni umnožak tog ugla.

Neka je celobrojni broj sa kojim se deli pun krug q (broj faza). Tada je ugao između ma kojeg para navoja (faznih navoja) sa indeksima i i k:

$$\gamma_{xr}^{i}-\gamma_{xr}^{k}=(i-k)\frac{2\pi}{q_x}\ ,\ \text{gde je } x=s \text{ ili } r,\quad i,k=1,2,......,q_x\,.$$

Broj navoja u višefaznom namotaju može biti različit, ali najviše jednak q. Ako je broj navoja manji od q radi se o nepotpunom q-faznom namotaju. U daljnjem razmatranju smatraćemo da je broj navoja upravo jednak q.

Za $q=1$ i $q=2$ - jednofazni namotaji, $q=4$ ali sa svega dva navoja pod električnim uglom od $\pi/2$ - dvofazni namotaj.

Iz uslova jednakosti namotaja proizlazi da možemo da posmatramo samo po jedan namotaj na statoru i rotoru i za matricu otpornosti možemo jednostavnije pisati:

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_s & \\ & \mathbf{R}_r\end{bmatrix},\quad \mathbf{R}_s=\mathbf{R}_s\,\mathbf{I},\quad \mathbf{R}_r=\mathbf{R}_r\,\mathbf{I},$$

gde je $\mathbf{I}$ jedinična matrica koja ima za statorski odnosno rotorski namotaj ima dimenzije (q_s,q_s), odnosno (q_r,q_r).

Za električni ugao od rotorske referentne ose r do posmatranog navoja imamo:

$$\gamma_{xr}^{i}=\gamma_{xr}^{1}+(i-1)\frac{2\pi}{q_x}\ \text{ ili }\ \gamma_{xr}^{i}=\gamma_{xr}^{0}+i\,\frac{2\pi}{q_x}$$

gde je $x=s$ ili r, $i=1, 2,.....,q_x$ ili $i=0, 1,.....,q_x-1$.

Dakle, u prvom slučaju referentni namotaj ima indeks 1, dok u drugom slučaju ima indeks 0.

Pri tome treba imati u vidu relaciju: $\gamma_{xr}^{1}=\gamma_{xs}^{1}-\vartheta$ kojom se referiranje prvog, a time i svih ostalih navoja namotaja sa indeksom x, prebacuje sa rotorske referentne ose na statorsku referentnu osu.

Sada za opštu formulu induktivnosti višefaznog namotaja imamo:

$$L_{xy}^{ik}=M_{xy}\cos\left[\gamma_{xr}^{1}-\gamma_{yr}^{1}+\frac{2\pi}{q_x}(i-1)-\frac{2\pi}{q_y}(k-1)\right]+$$
$$+N_{xy}\cos\left[\gamma_{xr}^{1}+\gamma_{yr}^{1}+\frac{2\pi}{q_x}(i-1)+\frac{2\pi}{q_y}(k-1)\right]$$

ili

$$L_{xy}^{ik}=M_{xy}\cos\left[\gamma_{xr}^{0}-\gamma_{yr}^{0}+\left(\frac{2\pi}{q_x}i-\frac{2\pi}{q_y}k\right)\right]+N_{xy}\cos\left[\gamma_{xr}^{0}+\gamma_{yr}^{0}+\left(\frac{2\pi}{q_x}i+\frac{2\pi}{q_y}k\right)\right].$$

Matrica induktivnosti $\mathbf{L}=\begin{bmatrix}\mathbf{L}_{ss} & \mathbf{L}_{sr}\\ \mathbf{L}_{rs} & \mathbf{L}_{rr}\end{bmatrix}$ u opštem slučaju ima velike dimenzije i mnogo nenultih elemenata.

Primenom Ojlerovog obrasca: $\cos\alpha=\dfrac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}$ na sve elemente u matrici $\mathbf{L}$ imamo:

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}\mathbf{F}_s & \\ & \mathbf{F}_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{L}_{ss}^{\mathrm{F}} & \mathbf{L}_{sr}^{\mathrm{F}}\\ \mathbf{L}_{rs}^{\mathrm{F}} & \mathbf{L}_{rr}^{\mathrm{F}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{F}_s^{+} & \\ & \mathbf{F}_r^{+}\end{bmatrix}=\mathbf{F}\overset{\mathrm{F}}{\mathbf{L}}\mathbf{F}^{+}$$

$$\mathbf{F}_x=\frac{1}{\sqrt{q_x}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ \overline{\alpha}_x & \alpha_x\\ \overline{\alpha}_x^{\,2} & \alpha_x^{2}\\ \vdots & \vdots\\ \overline{\alpha}_x^{\,q_x-1} & \alpha_x^{q_x-1}\end{bmatrix},$$

gde je $\alpha_x=e^{j\frac{2\pi}{q_x}}$, $x=s$ ili r, a crta iznad slova (npr. $\overline{\alpha}$) oznaka za konjugaciju.

Ovo je Forteskjuova transformacija, koja predstavlja opšti slučaj metode simetričnih komponenti. Za trofazni sistem bez nulte komponente imamo sledeći oblik matrice $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F}_x=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ \overline{\alpha} & \alpha\\ \alpha & \overline{\alpha}\end{bmatrix}$$

Nulte komponente, pored para glavnih, dopunjuju broj komponenata do q, raspregnute su od glavnih i ne učestvuju u elektromehaničkom pretvaranju energije. Ako one nisu nule, a potrebno ih je uzimati u obzir, mogu se tretirati izdvojeno, uz kasnije superponiranje rezultata.

Posebno uzimajući u obzir isturenost statora, odnosno rotora preko odgovarajuće matrice $\Delta\mathbf{L}_{xy}$, za matrice induktivnosti na kojima je primenjena Forteskjuova transformacija imamo:

$$\mathbf{L}_{ss}^{\mathrm{F}} = \mathbf{L}_{ss}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \Delta\mathbf{L}_{ss}\begin{bmatrix} 0 & \tau^2 \\ \overline{\tau}^2 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; \tau = e^{j\vartheta}$$

$$\mathbf{L}_{sr}^{\mathrm{F}} = \mathbf{L}_{sr}\begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \overline{\tau} \end{bmatrix} + \Delta\mathbf{L}_{sr}\begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \overline{\tau} & 0 \end{bmatrix} = \left(\mathbf{L}_{rs}^{\mathrm{F}}\right)^{+}$$

$$\mathbf{L}_{rr}^{\mathrm{F}} = \mathbf{L}_{rr}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \Delta\mathbf{L}_{rr}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pomoću matrica transformacija prvobitna (originalna) matrica se transformiše u kvadratnu matricu dimenzija 4x4.

Matrica $\overset{\mathrm{F}}{\mathbf{L}}$ za mašinu sa dva namotaja:

$$\overset{\mathrm{F}}{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ss}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{L}_{sr}\begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \overline{\tau} \end{bmatrix} \\ \mathbf{L}_{sr}\begin{bmatrix} \overline{\tau} & 0 \\ 0 & \tau \end{bmatrix} & \mathbf{L}_{rr}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{L}_{ss}\begin{bmatrix} 0 & \tau^2 \\ \overline{\tau}^2 & 0 \end{bmatrix} & \Delta\mathbf{L}_{sr}\begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \overline{\tau} & 0 \end{bmatrix} \\ \Delta\mathbf{L}_{sr}\begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \overline{\tau} & 0 \end{bmatrix} & \Delta\mathbf{L}_{rr}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Drugi član se pojavljuje ako rotor ima isturene polove.

Za više namotaja matrica se proširuje.

1.4 Transformacije

Cilj transformacija je da se sistemi diferencijalnih jednačina sa promenljivim koeficijentima, koji se ne mogu rešavati analitički, primenom linearnih tranformacija dovedu do oblika sistema diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima. Dakle, cilj je da se dođe do analitičkih izraza pogodnijih za rešavanje konkretnih zadataka, do takozvanih transformisanih matematičkih modela.

Sa fizičke tačke gledišta mašina se zamenjuje ekvivalentnom, ali jednostavnijom i preglednijom mašinom i proučavanja se vrše na takvoj, transformisanoj mašini umesto na originalnoj.

Transformacije rasprezanja imaju kao efekat bitno smanjenje nenultih elemenata međusobnih induktivnosti u matrici induktivnosti. Matematički postupak se svodi na potpunu ili nepotpunu dijagonalizaciju (ili čak redukciju dimenzija) pojedinih submatrica matrice induktivnosti.

U fizičkom smislu posmatrana višefazna mašina se zamenjuje dvofaznom.

Transformacije kretanja imaju za cilj postizavanje nezavisnosti matrice induktivnosti od položaja rotora i vremena, čime se može postići značajno uprošćavanje rešavanja sistema diferencijalnih jednačina. Pošto se samim postupkom transformacije ne gube informacije, zavisnost od položaja rotora će se javiti na drugom mestu- u samoj transformacionoj matrici i u vidu dopunskih (“dinamičkih”) članova u momentnoj i naponskoj jednačini.

Transformacije kretanja se mogu posmatrati kao zamena mašine statičkim transformatorom, jer se na određeni način isključuje relativno kretanje rotora prema statoru, a uticaj tog kretanja zamenjuje se dodatnim, “dinamičkim” elektromotornim silama. Ove transformacije su ekvivalentne geometrijskim transformacijama koordinatnog sistema.

Transformacije nivoa se primenjuju za pojedine namotaje i imaju za cilj izjednačenje njihovih naponskih nivoa (slično svođenju sekundara nekog transformatora na primar).

Transformacija je, dakle, zamena parametara pri čemu dolazi do novih jednačina.

Za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ kažemo da je regularna (invertibilna) matrica ako vredi:

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{I}$, gde je $\mathbf{A}^{-1}$ inverzna matrica matrice $\mathbf{A}$. Ako kvadratna matrica nije regularna, onda je singularna.

Na primeru pogledajmo kako se primenjuje npr. A transformacija.

Neka su originalne matrice $\boldsymbol{\psi}$, $\mathbf{L}$ i $\mathbf{i}$ a transformisane (nove) matrice $\overset{\mathrm{A}}{\boldsymbol{\psi}}$, $\overset{\mathrm{A}}{\mathbf{L}}$ i $\overset{\mathrm{A}}{\mathbf{i}}$.

Za vektore vredi: $\mathbf{i}_{staro}=\mathbf{A}\ \mathbf{i}_{novo}$, odnosno obrnuto $\mathbf{i}_{novo}=\mathbf{A}^{+}\ \mathbf{i}_{staro}$.

Za matrice vredi $\mathbf{L}_{staro}=\mathbf{A}\,\mathbf{L}_{novo}\ \mathbf{A}^{+}$, odnosno obrnuto $\mathbf{L}_{novo}=\mathbf{A}^{+}\ \mathbf{L}_{staro}\ \mathbf{A}$.

Imamo:

$$\boldsymbol{\psi}=\mathbf{L}\,\mathbf{i}$$

$$\boldsymbol{\psi}=\mathbf{A}\overset{\mathrm{A}}{\boldsymbol{\psi}},\ \mathbf{i}=\mathbf{A}\overset{\mathrm{A}}{\mathbf{i}}$$

$$\boldsymbol{\psi}=\mathbf{A}\overset{\mathrm{A}}{\boldsymbol{\psi}}=\mathbf{L}\ \mathbf{A}\ \overset{\mathrm{A}}{\mathbf{i}}\ /\cdot\mathbf{A}^{-1}\quad\Rightarrow\quad\overset{\mathrm{A}}{\boldsymbol{\psi}}=\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{L}\ \mathbf{A}\ \overset{\mathrm{A}}{\mathbf{i}}=\overset{\mathrm{A}}{\mathbf{L}}\ \overset{\mathrm{A}}{\mathbf{i}}$$

Prethodnu matričnu jednačinu u kojoj je na sve matrice primenjena matrica transformacije $\mathbf{A}$ skraćeno možemo da pišemo u obliku:

$$[\mathbf{A}:]\ \boldsymbol{\psi}=\mathbf{L}\,\mathbf{i}$$

Transformacija se može vršiti i sa neregularnom matricom $\mathbf{F}$.

1.4.1 Transformacija rasprezanja F

$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{L}\,\mathbf{i}$

$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{F}\,\overset{F}{\boldsymbol{\psi}}, \; \mathbf{i} = \mathbf{F}\,\overset{F}{\mathbf{i}}$

$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{F}\,\overset{F}{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{L}\;\mathbf{F}\;\overset{F}{\mathbf{i}}\;/\cdot\mathbf{F}^{+}$ ako je ispunjen uslov: $\mathbf{F}^{+}\,\mathbf{F} = \mathbf{I}\;\left(\mathbf{F}\;\mathbf{F}^{+} \neq \mathbf{I}\right)$ imamo:

$\overset{F}{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{F}^{+}\,\mathbf{L}\;\mathbf{F}\;\overset{F}{\mathbf{i}} = \overset{F}{\mathbf{L}}\;\overset{F}{\mathbf{i}}$, dakle $\overset{F}{\mathbf{L}} = \mathbf{F}^{+}\,\mathbf{L}\;\mathbf{F}$.

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\,\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}}{\mathrm{dt}};$$

$$\mathbf{F}\;\overset{F}{\mathbf{u}} = \mathbf{R}\,\mathbf{F}\,\overset{F}{\mathbf{i}} + \frac{\mathrm{d}(\mathbf{F}\,\overset{F}{\boldsymbol{\psi}})}{\mathrm{d}t}\;/\cdot\mathbf{F}^{+}\;\;;\;\mathbf{F} \neq f\,(t,\vartheta)$$

$$\mathbf{F}^{+}\,\mathbf{F}\;\overset{F}{\mathbf{u}} = \overset{F}{\mathbf{u}} = \mathbf{F}^{+}\,\mathbf{R}\,\mathbf{F}\,\overset{F}{\mathbf{i}} + \mathbf{F}^{+}\,\mathbf{F}\,\frac{\mathrm{d}\overset{F}{\boldsymbol{\psi}}}{\mathrm{d}t} = \overset{F}{\mathbf{R}}\,\overset{F}{\mathbf{i}} + \frac{\mathrm{d}\overset{F}{\boldsymbol{\psi}}}{\mathrm{d}t}$$

pošto je matrica $\mathbf{R}$ dijagonalna, imamo $\overset{F}{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$.

Uz $\mathbf{i} = \mathbf{F}\,\overset{F}{\mathbf{i}}$ i $\mathbf{i}^{+} = \mathbf{F}^{+}\,\overset{F}{\mathbf{i}}{}^{+}$ imamo:

$$m = \frac{1}{2}\mathbf{i}^{+}\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}\vartheta}\,\mathbf{i} = \frac{1}{2}\overset{F}{\mathbf{i}}{}^{+}\,\mathbf{F}^{+}\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}\vartheta}\,\mathbf{F}\cdot\overset{F}{\mathbf{i}} = \frac{1}{2}\overset{F}{\mathbf{i}}{}^{+}\,\frac{\mathrm{d}(\mathbf{F}^{+}\,\mathbf{L}\,\mathbf{F})}{\mathrm{d}\vartheta}\,\overset{F}{\mathbf{i}} = \frac{1}{2}\,\overset{F}{\mathbf{i}}{}^{+}\,\frac{\mathrm{d}\overset{F}{\mathbf{L}}}{\mathrm{d}\vartheta}\,\overset{F}{\mathbf{i}}$$

Opšti model mašine u F području:

$[\mathbf{F}:]$

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\,\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}}{\mathrm{dt}};$$

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{L}(\vartheta)\,\mathbf{i};$$

$$m_m = J\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + K\omega - Pm;$$

$$m = \frac{1}{2}\,\mathbf{i}^{+}\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}\vartheta}\mathbf{i};$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = \omega.$$

Za stator i rotor ove jednačine se transformišu u jednu algebarsku jednačinu, gde naponi, struje i fluksevi više nisu matrične, nego kompleksne veličine:

$$[\mathbf{F}:] \quad u_s = R_s\, i_s + \frac{\mathrm{d}\psi_s}{\mathrm{d}t};$$

$$u_r = R_r\, i_r + \frac{\mathrm{d}\psi_r}{\mathrm{d}t};$$

$$\psi_s = L_s\ i_s + \tau\ L_{sr}\, i_r + \tau^2\, \Delta L_s\, \bar{i}_s + \tau\, \Delta L_{sr}\, \bar{i}_r\ ;$$

$$\psi_r = \bar{\tau}\, L_{sr}\ i_s + L_r\, i_r + \tau\, \Delta L_{sr}\, \bar{i}_s + \Delta L_r\, \bar{i}_r\ ;$$

$$m_m = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + K\omega - Pm;$$

$$m = j\left(\bar{i}_s\, \psi_s - i_s\, \overline{\psi}_s\right);$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = \omega .$$

Neregularne transformacije izbacuju nulte komponente, kojih kod električnih mašina obično nema.

Rasprezanjem (bez nultih komponenti) se npr. kod trofaznih asinhronih mašina matrice induktivnosti dimenzija (3x3) svode na (2x2). Još je veći efekt kod kaveznih asinhronih mašina, pošto se broj faza rotora svodi na 2.

1.4.2 Transformacija rotacije G

Ovom transformacijom se izbacuje ugao ϑ iz transformisane matrice induktivnosti.

$$\overset{\mathrm{E}}{\mathbf{L}} = \mathbf{G}^{+}\, \mathbf{L}\, \mathbf{G} ,$$

gde je $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \tau & \\ & \tau^{*} \end{bmatrix}$, $\tau = e^{j\vartheta}$.

$$\overset{\mathrm{E}}{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^{+} & \\ & \mathbf{G}_r^{+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\mathrm{F}}{\mathbf{L}}_{ss} & \overset{\mathrm{F}}{\mathbf{L}}_{sr} \\ \overset{\mathrm{F}}{\mathbf{L}}_{rs} & \overset{\mathrm{F}}{\mathbf{L}}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s & \\ & \mathbf{G}_r \end{bmatrix}$$

gde je: $\mathbf{G}_s = \begin{bmatrix} e^{j\vartheta_s} & \\ & e^{-j\vartheta_s} \end{bmatrix}$, $\mathbf{G}_r = \begin{bmatrix} e^{j\vartheta_r} & \\ & e^{-j\vartheta_r} \end{bmatrix}$

ϑ_s i ϑ_r su proizvoljni uglovi, ali $\vartheta_s - \vartheta_r = \vartheta$

Brzinu referentne ose označavamo sa ω_s, brzinu obrtanja rotora sa ω, a kružnu učestanost višefaznog naizmeničnog spoljnog električnog sistema za koji je mašina vezana sa ω_e (npr. statorska učestanost kod asinhronog motora).

Koordinatni sistem može biti vezan za:

ROTOR $\vartheta_s = \vartheta,\ \ \vartheta_r = 0 \qquad (\vartheta_s - \vartheta_r = \vartheta)$

STATOR $\vartheta_r = -\vartheta,\ \ \vartheta_s = 0$

OBRTNO POLJE $\vartheta_s = \vartheta_e, \Rightarrow \vartheta_r = \vartheta_e - \vartheta$ gde je $\dfrac{d\omega_e}{dt} = 0 \ \Rightarrow \ \vartheta_e = \int_0^t \omega_e dt + \vartheta_0$

Kod *asinhronih mašina* zbog klizanja je praktičnije da se uzme $\vartheta_s = \vartheta_e$.

$[\mathbf{E}:]$ za $\vartheta_s = \vartheta \Rightarrow \vartheta_r = 0$

$$\overset{\mathrm{E}}{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ss}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} & \mathbf{L}_{sr}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \\ \mathbf{L}_{sr}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} & \mathbf{L}_{rr}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{L}_{ss}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} & \Delta\mathbf{L}_{sr}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \\ \Delta\mathbf{L}_{sr}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} & \Delta\mathbf{L}_{rr}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

Kod asinhrone mašine se može vršiti i drugačiji izbor, jer nema isturene polove.

Induktivnosti ne zavise više od vremena, ali se menja oblik jednačine napona u kojoj se javlja dinamički član.

$\overset{\mathrm{F}}{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{G}\overset{\mathrm{E}}{\boldsymbol{\psi}},\ \overset{F}{\mathbf{i}} = \mathbf{G}\overset{\mathrm{E}}{\mathbf{i}}\ ,\ \overset{\mathrm{F}}{\mathbf{u}} = \mathbf{G}\overset{\mathrm{E}}{\mathbf{u}}$.

$\mathbf{E} = \mathbf{F}\,\mathbf{G}$

$$\overset{\mathrm{F}}{\mathbf{u}} = \overset{\mathrm{F}}{\mathbf{R}}\overset{\mathrm{F}}{\mathbf{i}} + \frac{\mathrm{d}\overset{\mathrm{F}}{\boldsymbol{\psi}}}{\mathrm{d}t};s$$

$$\mathbf{G}\overset{\mathrm{E}}{\mathbf{u}} = \overset{\mathrm{F}}{\mathbf{R}}\mathbf{G}\overset{\mathrm{E}}{\mathbf{i}} + \frac{\mathrm{d}(\mathbf{G}\overset{\mathrm{E}}{\boldsymbol{\psi}})}{\mathrm{d}t} / \cdot \mathbf{G}^+ \ ;$$

$$\mathbf{G}^+\mathbf{G}\overset{\mathrm{E}}{\mathbf{u}} = \overset{\mathrm{E}}{\mathbf{u}} = \mathbf{G}^+\overset{\mathrm{F}}{\mathbf{R}}\,\mathbf{G}\overset{\mathrm{E}}{\mathbf{i}} + \mathbf{G}^+\mathbf{G}\frac{\mathrm{d}\overset{\mathrm{E}}{\boldsymbol{\psi}}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{G}^+\frac{\mathrm{d}\mathbf{G}}{\mathrm{d}t}\overset{\mathrm{E}}{\boldsymbol{\psi}}\ ,$$

$$\mathbf{G}^+\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{G}}{\mathrm{d}\vartheta}\overset{\mathrm{E}}{\boldsymbol{\psi}} = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}\mathbf{Y}\overset{\mathrm{E}}{\boldsymbol{\psi}} = \omega\mathbf{Y}\overset{\mathrm{E}}{\boldsymbol{\psi}},\ \text{gde je}\ \mathbf{Y} = \mathbf{G}^+\frac{\mathrm{d}\mathbf{G}}{\mathrm{d}\vartheta}\ .$$

U $[\mathbf{E}:]$ području: $\mathbf{Y}_s = j\dfrac{\omega_s}{\omega}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ \mathbf{Y}_r = j\dfrac{\omega_s - \omega}{\omega}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$,

u $[\mathbf{B}:]$ području: $\mathbf{Y}_s = \dfrac{\omega_s}{\omega}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{Y}_s = \dfrac{\omega_s - \omega}{\omega}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

U **Er** i **Br** - transformaciji referentna osa je vezana za rotor, pa je njena brzina $\omega_s = \omega$,

a u **Es** i **Bs** - transformaciji za stator, pa je $\omega_s = 0$.

Konačno imamo:

$$\overset{E}{\mathbf{u}} = \overset{E}{\mathbf{R}}\,\overset{E}{\mathbf{i}} + \frac{\mathrm{d}\overset{E}{\boldsymbol{\psi}}}{\mathrm{d}t} + \omega\,\mathbf{Y}\,\overset{E}{\boldsymbol{\psi}}\ .$$

Na sličan način se dolazi do jednačine za moment.

Sistem vezan za rotor:

$$[\mathbf{Er:}] \qquad u_s = R_s\, i_s + \frac{\mathrm{d}\psi_s}{\mathrm{d}t} + j\,\omega\psi_s\,;$$

$$u_r = R_r\, i_r + \frac{\mathrm{d}\psi_r}{\mathrm{d}t}\,;$$

$$\psi_s = L_s\ i_s + L_{sr}\, i_r + \Delta L_s\, \bar{i}_s + \Delta L_{sr}\, \bar{i}_r\ ;$$

$$\psi_r = L_{sr}\ i_s + L_r\, i_r + \Delta L_{sr}\, \bar{i}_s + \Delta L_r\, \bar{i}_r\ ;$$

$$m_m = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + K\omega - Pm\,;$$

$$m = j\left(\bar{i}_s\,\psi_s - i_s\,\bar{\psi}_s\right);$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = \omega\,.$$

Univerzalni matematički model asinhrone mašine $\vartheta_s - \vartheta_r = \vartheta \;\Rightarrow\; \omega_s - \omega_r = \omega$.

Asinhrona mašina nema isturene polove pa se članovi sa ΔL se ne pojavljuju u izrazima za ukupni fluks statora i rotora.

$$[\mathbf{E:}] \qquad u_s = R_s\, i_s + \frac{\mathrm{d}\psi_s}{\mathrm{d}t} + j\,\omega_s\,\psi_s\,;$$

$$u_r = R_r\, i_r + \frac{\mathrm{d}\psi_r}{\mathrm{d}t} + j(\omega_s - \omega)\psi_r\,;$$

$$\psi_s = L_s\ i_s + L_{sr}\, i_r\ ;$$

$$\psi_r = L_{sr}\ i_s + L_r\, i_r\ ;$$

$$m_m = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + K\omega - Pm\,;$$

$$m = j\left(\bar{i}_s\,\psi_s - i_s\,\bar{\psi}_s\right);$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = \omega\,.$$

Za $\omega_s = 0$ sistem je vezan za stator.

Različiti oblici prikaza elektromagnetskog momenata su:

- preko statorskih veličina $m = j\left(\bar{i}_s\,\psi_s - i_s\,\overline{\psi}_s\right)$,
- preko rotorskih veličina $m = j\left(\overline{\psi}_r\,i_r - \psi_r\,\bar{i}_r\right)$,
- preko struja $m = j\,L_{sr}\left(\bar{i}_s\,i_r - i_s\,\bar{i}_r\right)$,
- preko struje rotora i ukupnog fluksa statora $m = j\dfrac{L_{sr}}{L_s}\left(\bar{i}_r\,\psi_s - i_r\,\overline{\psi}_s\right)$,
- preko struje statora i ukupnog fluksa rotora $m = j\dfrac{L_{sr}}{L_r}\left(\bar{i}_s\,\psi_r - i_s\,\overline{\psi}_r\right)$ - *ovaj oblik se najčešće koristi, zato što je rotor asinhrone mašine u kratkom spoju.*

1.4.3 Realne transformacije

Prelazak sa kompleksne na realne transformacije vrši se matricom $\mathbf{H}$.

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix},\quad \mathbf{H}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}\ \mathbf{H}$$

$$\overset{C}{\mathbf{L}} = \mathbf{C}^{+}\ \mathbf{L}\ \mathbf{C}$$

1.4.3.1 Realna transformacija rasprezanja C

$$\mathbf{C} = \frac{\sqrt{2}}{q}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos\dfrac{2\pi}{q} & \sin\dfrac{2\pi}{q} \\ \cos 2\dfrac{2\pi}{q} & \sin 2\dfrac{2\pi}{q} \\ \vdots & \vdots \\ \cos 2\dfrac{2\pi}{q} & -\sin 2\dfrac{2\pi}{q} \\ \cos\dfrac{2\pi}{q} & -\sin\dfrac{2\pi}{q} \end{bmatrix}$$

1.4.3.2 Realna transformacija rotacije D

$$\mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_s & -\sin\vartheta_s \\ \sin\vartheta_s & \cos\vartheta_s \end{bmatrix},\quad \mathbf{D}_r = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_r & -\sin\vartheta_r \\ \sin\vartheta_r & \cos\vartheta_r \end{bmatrix}\quad \text{gde je } \vartheta_s - \vartheta_r = \vartheta$$

1.4.3.3 Blondelova transformacija B

$$\overset{\mathrm{B}}{\mathbf{L}}=\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ss}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} & \mathbf{L}_{sr}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \\ \mathbf{L}_{sr}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} & \mathbf{L}_{rr}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{L}_{ss}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} & \Delta\mathbf{L}_{sr}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \\ \Delta\mathbf{L}_{sr}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} & \Delta\mathbf{L}_{rr}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{L}_{sd} & 0\\ 0 & \mathbf{L}_{sq}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\mathbf{M}_{d} & 0\\ 0 & \mathbf{M}_{q}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}\mathbf{M}_{d} & 0\\ 0 & \mathbf{M}_{q}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\mathbf{L}_{rd} & 0\\ 0 & \mathbf{L}_{rq}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

gde je:

$\mathbf{L}_{sd}=\mathbf{L}_{ss}+\Delta\mathbf{L}_{ss}$, $\mathbf{L}_{rd}=\mathbf{L}_{rr}+\Delta\mathbf{L}_{rr}$,

$\mathbf{L}_{sq}=\mathbf{L}_{ss}-\Delta\mathbf{L}_{ss}$, $\mathbf{L}_{rq}=\mathbf{L}_{rr}-\Delta\mathbf{L}_{rr}$,

$\mathbf{M}_{d}=\mathbf{L}_{sr}+\Delta\mathbf{L}_{sr}$, $\mathbf{M}_{q}=\mathbf{L}_{sr}-\Delta\mathbf{L}_{sr}$.

Ako mašina nema isturene polove (npr. asinhrona mašina), može se vršiti proizvoljan izbor osa.

$d-q$ jednačine, $\vartheta_s=\vartheta \quad \vartheta_r=0$

[Br :] $$u_{sd}=R_s\, i_{sd}+\frac{\mathrm{d}\psi_{sd}}{\mathrm{d}t}-\omega\psi_{sq};$$

$$u_{sq}=R_s\, i_{sq}+\frac{\mathrm{d}\psi_{sq}}{\mathrm{d}t}+\omega\psi_{sd} \qquad \Rightarrow \qquad u_s=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(u_{sd}+j\,u_{sq}\right);$$

$$u_{rd}=R_r\, i_{rd}+\frac{\mathrm{d}\psi_{rd}}{\mathrm{d}t};$$

$$u_{rq}=R_r\, i_{rq}+\frac{\mathrm{d}\psi_{rq}}{\mathrm{d}t};$$

$$\psi_{sd}=L_{sd}\, i_{sd}+M_d\, i_{rd};$$

$$\psi_{sq}=L_{sq}\, i_{sq}+M_q\, i_{rq};$$

$$\psi_{rd}=M_d\, i_{sd}+L_{rd}\, i_{rd};$$

$$\psi_{rq}=M_q\, i_{sq}+L_{rq}\, i_{rq};$$

$$m_m=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+K\omega-Pm;$$

$m=i_{sq}\,\psi_{sd}-i_{sd}\,\psi_{sq}$ i druge kombinacije;

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}=\omega.$$

[B :]
$$u_{sd} = R_s\, i_{sd} + \frac{d\psi_{sd}}{dt} - \omega\psi_{sq}\,;$$

$$u_{sq} = R_s\, i_{sq} + \frac{d\psi_{sq}}{dt} + \omega\psi_{sd}\,;$$

$$u_{rd} = R_r\, i_{rd} - (\omega_s - \omega)\frac{d\psi_{rd}}{dt}\,;$$

$$u_{rq} = R_r\, i_{rq} + (\omega_s - \omega)\frac{d\psi_{rq}}{dt}\,;$$

$$\psi_{sd} = L_{sd}\, i_{sd} + M_d\, i_{rd}\,;$$

$$\psi_{sq} = L_{sq}\, i_{sq} + M_q\, i_{rq}\,;$$

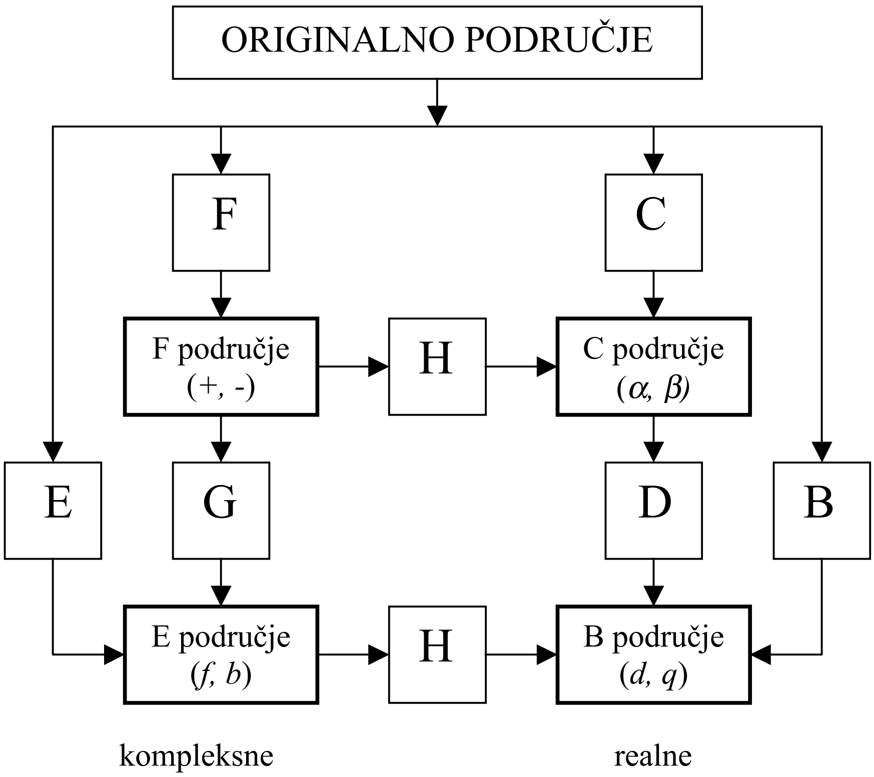
$$\psi_{rd} = M_d\, i_{sd} + L_{rd}\, i_{rd}\,;$$

$$\psi_{rq} = M_q\, i_{sq} + L_{rq}\, i_{rq}\,;$$

$$m_m = J\frac{d\omega}{dt} + K\omega - Pm\,;$$

$m = i_{sq}\,\psi_{sd} - i_{sd}\,\psi_{sq}$ i druge kombinacije;

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega\,.$$



Slika 1-5 Prikaz transformacija

Tok uvođenja transformacija:

F (kompleksna, rasprezanje) uveo Forteskju 1918.,

D uveo Blondel (Park) 1933.

C (realna, rasprezanje) uvela Edika Klark 1943.

Transformacije su objedinili Vajt i Vudson 1959.

Legenda oznaka:

E područje: f - napred (forward), b - nazad (backward),

B područje: d - podužno (direct), q - poprečno (quadrature).

1.4.4 Transformacije za trofaznu električnu mašinu

(sa nultim elementima)

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \overline{\alpha} & \alpha & 1 \\ \alpha & \overline{\alpha} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_z = \begin{bmatrix} \tau_z & & \\ & \overline{\tau}_z & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \ \tau_z = e^{j\vartheta_z}\ , \qquad \mathbf{D}_z = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_z & -\sin\vartheta_z & 0 \\ \sin\vartheta_z & \cos\vartheta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_z = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \tau_z & \overline{\tau}_z & 1 \\ \tau_z\overline{\alpha} & \overline{\tau}_z\alpha & 1 \\ \tau_z\alpha & \overline{\tau}_z\overline{\alpha} & 1 \end{bmatrix}\ , \qquad \mathbf{B}_z = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} \cos\vartheta_z & -\sin\vartheta_z & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\vartheta_z - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\vartheta_z - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\vartheta_z - \frac{4\pi}{3}\right) & -\sin\left(\vartheta_z - \frac{4\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

statorske promenljive: $z = s$

rotorske promenljive: $z = r$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & j & 1 \\ 1 & -j & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.5 Sinhrone mašine

Sinhrona mašina u opštem slučaju ima tri namotaja: namotaj pobude (induktora) na rotoru, namotaj indukta na statoru i prigušni namotaj na rotoru. Zbog isturenih polova, kod sinhrone mašine koordinatni sistem se obično vezuje za rotor, tako da se koristi Br transformacija.

Pobuda deluje samo na d osu. Višefazni prigušni namotaj se primenom C (Klarkove) transformacije svodi (raspreže) na dvofazni.

U ovom slučaju važi jednačina naponske ravnoteže zapisana u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_f \\ u_D \\ u_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix}$$

gde pojedini indeksi označavaju: d i q statorske veličine, f veličine jednofaznog pobudnog namotaja, a D i Q veličine raspregnutog prigušnog namotaja.

Matrična relacija za fluksne obuhvate glasi:

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & M_{fd} & M_{dD} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & M_{qQ} \\ M_{fd} & 0 & L_f & M_{fD} & 0 \\ M_{dD} & 0 & M_{fD} & L_D & 0 \\ 0 & M_{qQ} & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix}$$

Sada je matrica induktivnosti:

$$\overset{\text{Br}}{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & M_{fd} & M_{dD} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & M_{qQ} \\ M_{fd} & 0 & L_f & M_{fD} & 0 \\ M_{dD} & 0 & M_{fD} & L_D & 0 \\ 0 & M_{qQ} & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix}$$

Nema međinduktivnosti između bilo kojih d i q osa. Ose f, d i D, odnosno q i Q se poklapaju.

1.5.1 Transfomacija nivoa T

Matrica $\mathbf{T}$ je dijagonalna, transpozicijom se ne menja. Primenom transformacije nivoa (svođenjem navojaka) se ne menjaju snage i momenti. Kod sinhrone mašine se obično primenjuje Ts transformacija, tj. veličine se svode na broja navojaka statorskog namotaja.

U matrici induktivnosti imamo različite vrednosti međuinduktivnosti. Uvođenjem navojne Ts transformacije dobijamo samo dve vrednosti međuinduktivnosti M_d i M_q. Dakle, transformacija nivoa se zasniva na principu jednakih induktivnosti.

Matrica transformacije $\mathbf{T}_s$ ima oblik: $\mathbf{T_s} = diag\left[1,\ 1,\ \frac{M_d}{M_{fd}}, \frac{M_d}{M_{dD}},\ \frac{M_q}{M_{qQ}}\right]$

gde su i $M_q = \frac{M_{fd}\, M_{qQ}}{M_{fD}}$, tj. usvojen je odnos $\frac{M_d}{M_{dD}} = \frac{M_q}{M_{qQ}}$.

$$\overset{\text{BrTs}}{\mathbf{L}} = \mathbf{T}_s^{+} \overset{\text{Br}}{\mathbf{L}} \mathbf{T}_s$$

$$\overset{\text{BrTs}}{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & M_d & M_d & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & M_q \\ M_d & 0 & L'_f & M_d & 0 \\ M_d & 0 & M_d & L'_D & 0 \\ 0 & M_q & 0 & 0 & L'_Q \end{bmatrix}$$

gde su:

$$L'_f = L_f \left(\frac{M_d}{M_{fd}} \right)^2,\ L'_D = L_D \left(\frac{M_d}{M_{dD}} \right)^2 \text{ i } L'_Q = L_Q \left(\frac{M_q}{M_{qQ}} \right)^2.$$

Uvođenje navojne Ts transformacije omogućuje da se induktivnost L namotaja prikaže kao zbir odgovarajuće međuinduktivnosti M i rasipne induktivnosti Λ tako da je:

$$\begin{aligned} L_d &= M_d + \Lambda_d \\ L_q &= M_q + \Lambda_q \\ L'_f &= M_d + \Lambda'_f \\ L'_D &= M_d + \Lambda'_D \\ L'_Q &= M_q + \Lambda'_Q \end{aligned}$$

Sledstveno rečenom ukupan fluks se može prikazati kao zbir zajedničkog fluksa (fluksa magnećenja) i rasipnog fluksa namotaja.

Matrica otpornosti nakon primene navojne Ts transformacije je:

$$\overset{\text{BrTs}}{\mathbf{R}} = \mathbf{T}_s^{+} \overset{\text{Br}}{\mathbf{R}} \mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R'_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R'_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R'_Q \end{bmatrix},\ \text{gde je } R_D = R_Q.$$

Za pojedine vektore $\mathbf{i}$, $\boldsymbol{\psi}$ i $\mathbf{u}$ važi:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \dfrac{M_{fd}}{M_d} \\ i_D \dfrac{M_{dD}}{M_d} \\ i_Q \dfrac{M_{qQ}}{M_q} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_f \dfrac{M_d}{M_{fd}} \\ \psi_D \dfrac{M_d}{M_{dD}} \\ \psi_Q \dfrac{M_q}{M_{qQ}} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_f \dfrac{M_d}{M_{fd}} \\ u_D \dfrac{M_d}{M_{dD}} \\ u_Q \dfrac{M_q}{M_{qQ}} \end{bmatrix}$$

1.5.2 Matematički model sinhrone mašine u BrTs području

S obzirom na smer struja, jednačine su napisane za motorski režim rada. Da bi se model prilagodio generatorskom režimu rada, potrebno je promeniti predznak statorskih struja

($i_d \to -i_d$ i $i_q \to -i_q$).

Jednačine naponske ravnoteže:

$$[\mathbf{BrTs:}] \qquad u_d = R_s\, i_d + \frac{\mathrm{d}\psi_d}{\mathrm{d}t} - \omega\psi_q;$$

$$u_q = R_s\, i_q + \frac{\mathrm{d}\psi_q}{\mathrm{d}t} + \omega\psi_d;$$

$$u_f = R_f\, i_f + \frac{\mathrm{d}\psi_f}{\mathrm{d}t};$$

$$0 = u_D = R_D\, i_D + \frac{\mathrm{d}\psi_D}{\mathrm{d}t};$$

$$0 = u_Q = R_Q\, i_Q + \frac{\mathrm{d}\psi_Q}{\mathrm{d}t};$$

gde je $R_Q = R_D$. Naponi na prigušnom namotaju jednaki su nuli jer je on kratko spojen

Jednačine za fluksne obuhvate izražene preko samoinduktivnosti L:

$$\psi_d = L_d\, i_d + M_d\, i_f + M_d\, i_D;$$

$$\psi_q = L_q\, i_q + M_q\, i_Q;$$

$$\psi_f = M_d\, i_d + L_f\, i_f + M_d\, i_D;$$

$$\psi_D = M_d\, i_d + M_d\, i_f + L_D\, i_D;$$

$$\psi_Q = M_q\, i_q + L_Q\, i_Q;$$

podužni fluks zavisi samo od podužnih struja, a poprečni samo od poprečnih.

$$m_m = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + K\omega - Pm$$

$$m = (i_q\psi_d - i_d\psi_q)$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = \omega = const$$

Jednačine za fluksne obuhvate izražene preko rasipnih induktivnosti Λ:

$$\psi_d = M_d\, i_{md} + \Lambda_d\, i_d$$

$$\psi_q = M_q\, i_{mq} + \Lambda_q\, i_q$$

$$\psi_f = M_d\, i_{md} + \Lambda_f\, i_f$$

$$\psi_D = M_d\, i_{md} + \Lambda_D\, i_D$$

$$\psi_Q = M_q\, i_q + \Lambda_Q\, i_Q$$

gde je:

$\Lambda_q = \Lambda_d$, $\Lambda_Q = \Lambda_D$,

$i_{md} = i_d + i_f + i_D$ podužna struja magnećenja,

$i_{mq} = i_q + i_Q$ poprečna struja magnećenja.

Podužni zajednički fluks je:

$$\psi_{md} = M_d\, i_{md}\,,$$

dok je poprečni zajednički fluks:

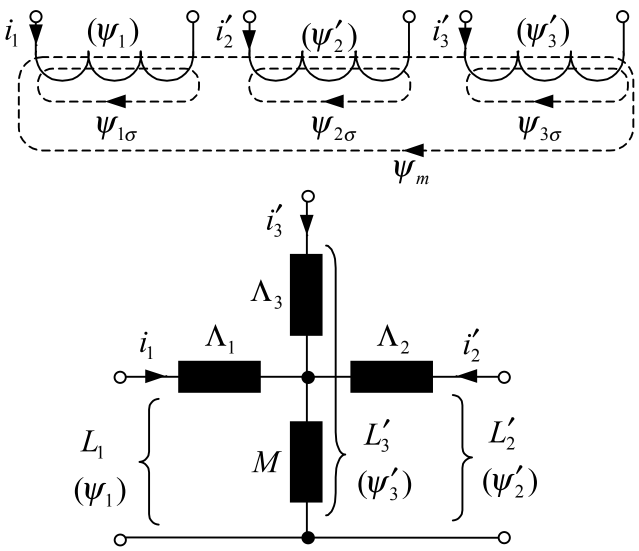
$$\psi_{mq} = M_q\, i_{mq}$$

Jednačine za fluks izražene preko samoinduktivnosti L se koriste za primenu na računarima, a drugi oblik, preko rasipnih induktivnosti Λ, je dobar za fizičku predstavu. Drugi oblik se koristi za primenu ra računarima kada se uzima u obzir zasićenje te gubici usled histereze i vihornih struja.

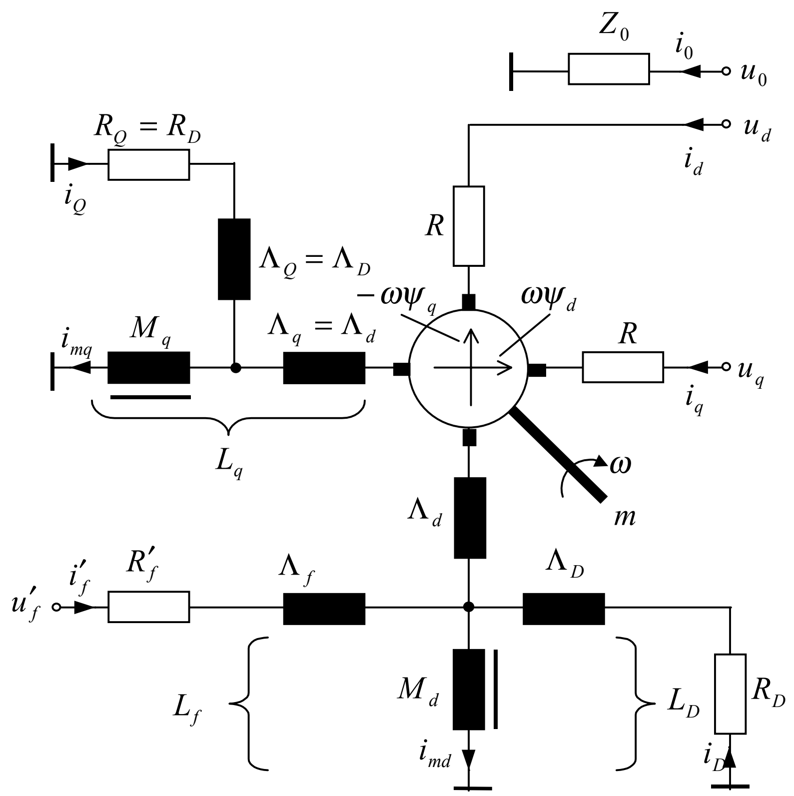
Matematički model sinhrone mašine se lako pretvara u matematički model asinhrone mašine - izbaci se pobudni namotaj ($i_f = 0$), a budući da asinhrona mašina obično nema isturene polove vredi: $L_d = L_q$ i $M_d = M_q$. Kod asinhronih mašina koriste se veze za stator, ili još češće za obrtno polje.

1.5.3 Ekvivalentna šema sinhrone mašine

S obzirom da u sinhronoj mašini imamo u opštem slučaju tri namotaja, pogledajmo prvo ekvivalentnu šemu za tronamotajni transformator.



Slika 1-6 Tronamotajni transformator



Slika 1-7 BrTs šema standardne sinhrone mašine sa isturenim polovima i prigušnim namotajom, uključujući i nulto kolo

1.5.4 Parkove jednačine

Parkove jednačine se dobijaju kada se iz naponskih jednačina sinhrone mašine eliminišu prigušni namotaji, pošto nisu dostupni, i pobudni namotaj. Ovo se može napraviti samo u Laplasovom području, a ne u vremenskom.

U ovu svrhu poslužićemo se tzv. Karsonovom modifikaciojom Laplasove transformacije, gde je, u odnosu na originalnu Laplasovu transformaciju, dodato množenje sa p desne strane jednačine, da bi transformisane fizičke veličine zadržale svoju prvobitnu fizičku dimenziju:

$$L[f(t)]=F(p)=p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t \;;\quad L\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]=p\left[F(p)-f(0^-)\right];$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{p\to 0} F(p); \qquad \lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{p\to\infty} F(p)\,.$$

gde je $f(0^-)$ početna vrednost funkcije.

Za dobijanje transformisane funkcije $F(p)$ iz zadate vremenske funkcije $f(t)$ i obrnuto postoje posebne tablice za funkcije koje se najčešće sreću u praksi.

Naponske jednačine sinhrone mašine napisane u Laplasovom području:

$$[\mathbf{L:}]\qquad u_d = R\,i_d + p(\psi_d - \Psi_d) - \omega\psi_q,\quad \omega = const.;$$

$$u_q = R\,i_q + p(\psi_q - \Psi_q) + \omega\psi_d;$$

$$u_f = R_f\,i_f + p(\psi_f - \Psi_f);$$

$$0 = u_D = R_D\,i_D + p(\psi_D - \Psi_D);$$

$$0 = u_Q = R_Q\,i_Q + p(\psi_Q - \Psi_Q);$$

$$\psi_d - \Psi_d = L_d(p)(i_d - I_d) + G(p)(u_f - U_f)\;;$$

$$\psi_q - \Psi_q = L_q(p)(i_q - I_q)\;;$$

$$i_f = -\,p\,G(p)\,i_d + \frac{1}{R_f + pL_f}U_f\;;$$

$$\psi_f = G(p)R_f\,i_d + L_{f0}(p)\frac{U_f}{R_f}.$$

gde je:

$$L_d(p) = L_d\frac{(1+pT_d'')(1+pT_d')}{(1+pT_{do}'')(1+pT_{do}')}\quad \text{podužna induktivnost,}$$

$$L_q(p) = L_q\frac{(1+pT_{qo}'')}{(1+pT_{qo}')}\quad \text{poprečna induktivnost.}$$

Vremenske konstante $T_d'' ... T_{qo}''$ zavise od konstrukcije mašine i određuju se u ogledu kratkog spoja.

$$p\,G(p) = \frac{\left[p\,M_d\,//\,(R_D + p\Lambda_D)\right]}{(R_f + p\Lambda_f) + \left[p\,M_d\,//\,(R_D + p\Lambda_D)\right]}, \quad pL_{f0}(p) = p\Lambda_f + \left[p\,M_d\,//\,(R_D + p\Lambda_D)\right]$$

gde je // oznaka za paralelnu vezu.

1.5.5 Ustaljeno stanje sinhrone mašine

U ustaljenom (stacionarnom) stanju smatra se da su izvodi svih flukseva jednaki nuli, te da prigušni namotaj ne deluje.

Jednačine napisane za motorski režim rada su:

$$u_d = R\,i_d - \omega\psi_q\,,$$

$$u_q = R\,i_q + \omega\psi_d\,,$$

$$\psi_d = L_d\,i_d + M_d\,i_f\,,$$

$$\psi_q = L_q\,i_q\ .$$

$$u_d = R\,i_d - \omega\,L_q i_q$$

$$u_q = R\,i_q + \omega\,L_d\,i_d + \omega\,M_d i_f\ .$$

Jednačine napisane za generatorski režim rada, uz zanemarenje aktivne otpornosti statorskog namotaja $(R = 0)$ su:

$$u_d = X_q\,i_q\,,$$

$$u_q = -X_d\,i_d + \omega\,M_d\,i_f = -X_d\,i_d + X_{ad}\,i_f = -X_d\,i_d + E_q\ .$$

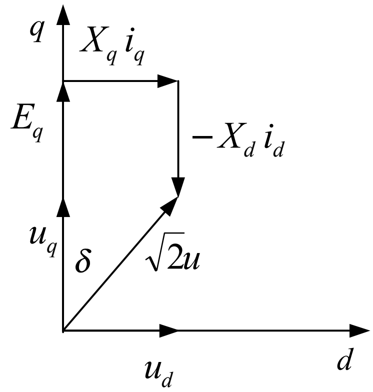
U indeksu ad, oznaka a je od armature (rotora).

Radi crtanja fazorskog dijagrama preći ćemo u kompleksno područje:

$$\overset{E}{\mathbf{u}} = \mathbf{H}\,\overset{B}{\mathbf{u}}$$

$$\begin{bmatrix} u_f \\ u_b \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix}.$$

$$\sqrt{2}\,u = 1\cdot u_d + j\cdot u_q = jE_q - jX_d\,i_d + X_q\,i_q$$



Slika 1-8 Fazorski dijagram sinhrone mašine u ustaljenom stanju

Analogno se može uraditi sa strujama i fluksevima.

1.6 Asinhrone mašine

Asinhrona mašina ima ravnomerni procep (cilindrično statorsko i rotorsko magnetno kolo), te su podužne i poprečne komponente jednake. Na statoru je smešten trofazni namotaj koji je spojen na napajanje. Rotor može takođe biti namotan trofazno, kada je preko kliznih prstenova vezan za spoljašnje elemente, obično trofazni otpornik, ili mu je namotaj višefazni kratkospojen, sa onoliko faza koliko ima provodnih štapova. Koordinatni sistem može da se veže da stator (stacionarni) ili za obrtno polje (sinhroni koordinatni sistem). Vezom sa rotorom se ništa ne dobija.

1.6.1 Matematički model trofazne asinhrone mašine u originalnom području

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\,\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}}{\mathrm{dt}};$$

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{L}(\vartheta)\,\mathbf{i};$$

$$m_m = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + K\omega - Pm;$$

$$m = \frac{1}{2}\,\mathbf{i}^{+}\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}\vartheta}\,\mathbf{i};$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = \omega;$$

gde je: $m = \frac{m_c}{P}$, $K = \frac{K_m}{P}$, $J = \frac{J_m}{P}$ i $\omega = P\omega_m$.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}_s\\ \mathbf{u}_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_{ss} & \underline{0}\\ \underline{0} & \mathbf{R}_{rr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{i}_s\\ \mathbf{i}_r\end{bmatrix}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}_s\\ \boldsymbol{\psi}_r\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}_s\\ \boldsymbol{\psi}_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{L}_{ss} & \mathbf{L}_{sr}\\ \mathbf{L}_{rs} & \mathbf{L}_{rr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{i}_s\\ \mathbf{i}_r\end{bmatrix};$$

$$m_m = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} - Pm; \quad K=0$$ (obično zanemarujemo trenje)

$$m_c = \frac{P}{2}\begin{bmatrix}\mathbf{i}_s^+ & \mathbf{i}_r^+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{0} & \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{sr}}{\mathrm{d}\vartheta}\\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{rs}}{\mathrm{d}\vartheta} & \underline{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{i}_s\\ \mathbf{i}_r\end{bmatrix};$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}=\omega;$$

$$\mathbf{u}_s=\begin{bmatrix}u_a\\ u_b\\ u_c\end{bmatrix};\quad \mathbf{u}_r=\begin{bmatrix}u_A\\ u_B\\ u_C\end{bmatrix};\quad \mathbf{i}_s=\begin{bmatrix}i_a\\ i_b\\ i_c\end{bmatrix};\quad \mathbf{i}_r=\begin{bmatrix}i_A\\ i_B\\ i_C\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R}_{ss}=\begin{bmatrix}R_s & 0 & 0\\ 0 & R_s & 0\\ 0 & 0 & R_s\end{bmatrix};\ \mathbf{R}_{rr}=\begin{bmatrix}R_r & 0 & 0\\ 0 & R_r & 0\\ 0 & 0 & R_r\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_{ss}=\begin{bmatrix}L_{aa} & L_{ab} & L_{ac}\\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc}\\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc}\end{bmatrix},\ \mathbf{L}_{rr}=\begin{bmatrix}L_{AA} & L_{AB} & L_{AC}\\ L_{BA} & L_{BB} & L_{BC}\\ L_{CA} & L_{CB} & L_{CC}\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_{sr}=\mathbf{L}_{rs}^+=L_{sr}\begin{bmatrix}\cos\vartheta & \cos(\vartheta+\frac{2\pi}{3}) & \cos(\vartheta-\frac{2\pi}{3})\\ \cos(\vartheta-\frac{2\pi}{3}) & \cos\vartheta & \cos(\vartheta+\frac{2\pi}{3})\\ \cos(\vartheta+\frac{2\pi}{3}) & \cos(\vartheta-\frac{2\pi}{3}) & \cos\vartheta\end{bmatrix}.$$

1.6.2 Matematički model trofazne asinhrone mašine u kompleksnom obliku

[Eo :] $$u_s = R_s i_s + \frac{\mathrm{d}\psi_s}{\mathrm{d}t} + j\omega_e\,\psi_s;$$

$$u_r = R_r i_r + \frac{\mathrm{d}\psi_r}{\mathrm{d}t} + j\,(\omega_e-\omega)\,\psi_r;$$

$$\psi_s = L_s\, i_s + L_{sr}\, i_r;$$

$$\psi_r = L_{sr}\, i_s + L_r\, i_r;$$

$$m_m = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + K\omega - Pm\,;$$

$$m = j\,L_{sr}\left(\bar{i}_s\, i_r - i_s\, \bar{i}_r\right);$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = \omega\,.$$

Pimenom navojne Ts transformacije, tj. sledećih zamena za rotorske veličine:

$$\mathbf{i}_r = \mathbf{T}_r\,\mathbf{i}'_r\,,\quad \boldsymbol{\psi}_r = \mathbf{T}_r^{-1}\,\boldsymbol{\psi}'_r\,,\ \mathbf{u}_r = \mathbf{T}_r^{-1}\,\mathbf{u}'_r$$

$$L_{sr} = \frac{L'_{sr}}{T_s\,T_r}\,,\ L_r = \frac{L'_r}{T_r^2}\,,\ \ R_r = \frac{R'_r}{T_r^2}$$

i usvajanjem transformacionih formula:

$$T_s = 1 \ \text{ i } \ T_r = n_s / n_r = \sqrt{L_s / L_r}\ ,$$

dobija se praktičniji EoTs model:

$$[\textbf{EoTs :}]\qquad u_s = R_s i_s + \frac{\mathrm{d}\psi_s}{\mathrm{d}t} + j\omega_e\,\psi_s\,;$$

$$u'_r = R'_r i'_r + \frac{\mathrm{d}\psi'_r}{\mathrm{d}t} + j\,\left(\omega_e - \omega\right)\psi'_r\,;$$

$$\psi_s = L_s\, i_s + M\, i_r\,;$$

$$\psi'_r = M\, i_s + L_r\, i'_r\,;$$

$$m_m = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + K\omega - Pm\,;$$

$$m = j\,L_{sr}\left(\bar{i}_s\, i'_r - i_s\, \bar{i}'_r\right);$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = \omega\,.$$

gde je: $L = M + \Lambda = L_s$ samoinduktivnost,

$M = L_s\, k_{sr}$ zajednička induktivnost,

$\Lambda = L_s\left(1 - k_{sr}\right)$ ili $\Lambda = L_s\left(1 - \sqrt{1 - \sigma_{sr}}\right)$ rasipna induktivnost,

$k_{sr} = \dfrac{L_{sr}}{\sqrt{L_s\, L_r}}$ koeficijent sprege i $\sigma_{sr} = 1 - \dfrac{L_{sr}}{L_s\, L_r}$ koeficijent ukupnog rasipanja.

Konačno, kada se uvede kliznje prema definiciji:

$$s = \frac{\omega_e - \omega}{\omega_e}$$

i izbace indeksi T-transformacije, dobija se EoTs model u preglednijoj formi:

$[\textbf{EoTs :}]$ $$u_s = R_s i_s + \frac{\mathrm{d}\psi_s}{\mathrm{d}t} + j\omega_e \psi_s ;$$

$$u_r = R_r i_r + \frac{\mathrm{d}\psi_r}{\mathrm{d}t} + j s\omega_e \psi_r ;$$

$$\psi_s = L_s i_s + M i_r ;$$

$$\psi_r = M i_s + L_r i_r ;$$

$$m_m = J \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + K\omega - Pm ;$$

$$m = j L_{sr} \left(\bar{i}_s i_r - i_s \bar{i}_r\right);$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = \omega .$$

Jednačine za fluksne obuhvate mogu se napisati i u formi sa eksplicitno izraženim zajedničkim fluksom i rasipanjem:

$$\psi_s = M\left(i_s + i_r\right) + \Lambda i_s = M i_\mu + \Lambda i_s = \psi_\mu + \lambda_s ,$$

$$\psi_r = M\left(i_s + i_r\right) + \Lambda i_r = M i_\mu + \Lambda i_r = \psi_\mu + \lambda_r ,$$

gde je $i_\mu = i_s + i_r$ struja magnećenja, $\psi_\mu = M i_\mu$ zajednički fluks a $\lambda_s = \Lambda i_s$ i $\lambda_r = \Lambda i_r$ statorski i rotorski rasipni fluksevi.

Konačno, dolazi se do sledećeg oblika jednačina:

$[\textbf{EoTs :}]$ $$u_s = R_s i_s + \frac{\mathrm{d}\psi_s}{\mathrm{d}t} + j\omega_e \psi_s ;$$

$$u_r = R_r i_r + \frac{\mathrm{d}\psi_r}{\mathrm{d}t} + j s\omega_e \psi_r ;$$

$$\psi_s = \psi_\mu + \lambda_s ;$$

$$\psi_r = \psi_\mu + \lambda_r ;$$

$$m_m = J \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + K\omega - Pm ;$$

$$m = j L_{sr} \left(\bar{i}_s i_r - i_s \bar{i}_r\right);$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = \omega .$$

1.6.3 Ekvivalentna šema asinhrone mašine za prelazna stanja

Ekvivalentna šema asinhrone mašine za prelazna stanja pravi se iz realnog modela:

[BrTs :]

$$u_{sd} = R_s i_{sd} + \frac{\mathrm{d}\psi_{sd}}{\mathrm{d}t} - \omega_e \psi_{sq};$$

$$u_{sq} = R_s i_{sq} + \frac{\mathrm{d}\psi_{sq}}{\mathrm{d}t} + \omega_e \psi_{sd};$$

$$u'_{rd} = R'_r i'_{rd} + \frac{\mathrm{d}\psi'_{rd}}{\mathrm{d}t} - (\omega_e - \omega)\,\psi'_{rq};$$

$$u'_{rq} = R'_r i'_{rq} + \frac{\mathrm{d}\psi'_{rq}}{\mathrm{d}t} + (\omega_e - \omega)\,\psi'_{rd};$$

$$\psi_{sd} = L_s\, i_{sd} + L'_{sr}\, i_{rd};$$

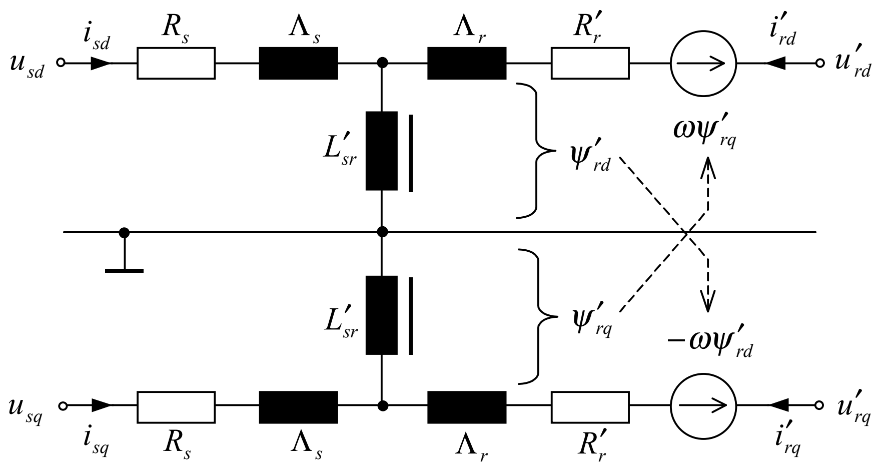
$$\psi_{sq} = L_s\, i_{sq} + L'_{sr}\, i_{rq};$$

$$\psi'_{rd} = L'_{sr}\, i_{sd} + L'_r\, i'_{rd};$$

$$\psi'_{rq} = L'_{sr}\, i_{sq} + L'_r\, i'_{rq}.$$

Ako se za brzinu referentne ose izabere $\omega_S = 0$, tj. ona "pričvrsti" za stator, dobijamo **BsTs** model, iz kojeg se crta ekvivalentno kolo (slika 1-9).

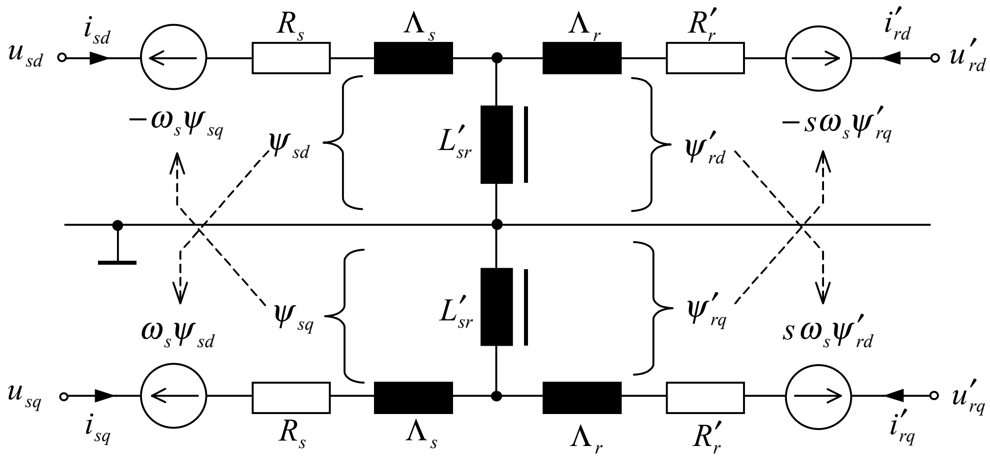
Ova šema važi za sva radna stanja, sve oblike napona i svaku nesimetriju. Poprečni generator pobuđuje podužni fluks i obrnuto. Podužne i poprečne komponente se ne mogu razdvojiti.



Slika 1-9 Ekvivalentna šema asinhrone mašine za BsTs model

$$\Lambda_s = L_s - M\ ,\ \Lambda_r = L_r - M\ ,\ M = L'_{sr}$$

Ako se za brzinu referentne ose izabere $\omega_s = \omega_e$, tj. ona "pričvrsti" za obrtno polje (sinhrona referentna osa), dobijamo **BTs** model. Ekvivalentno kolo u ovom modelu prikazano je na slici 1-10.



Slika 1-10 Ekvivalentna šema asinhrone mašine za BTs model

Praktična vrednost ovakvog izbora je u tome što se - slično kao u primeni Br-transformacije kod sinhronih mašina dolazi do jednosmernih veličina. Naime, kada se trofazni naponi transformišu pomoću **B** matrice uz $\vartheta_z = \vartheta_s = \omega_e\, t$ dobijaju se naponi:

$$\begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix} = \sqrt{3}\,U \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix},$$

dakle veličine koje su u ustaljenom stanju jednosmerne.

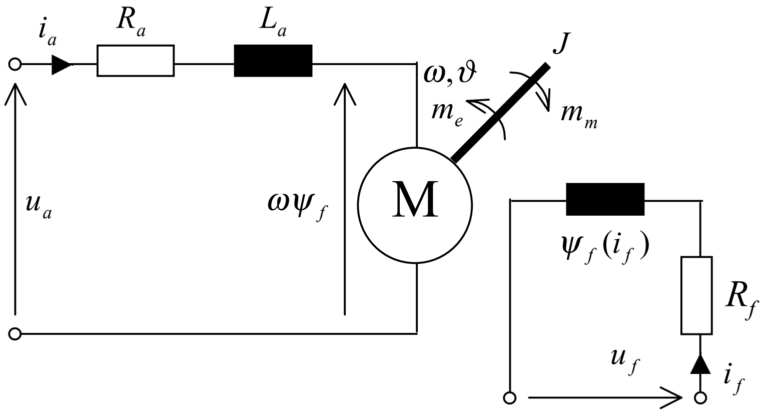
1.7 Mašine jednosmerne struje

Motor jednosmerne struje (*Direct Current motor*) spada u grupu električnih mašina sa dva namotaja (po jednim na statoru i rotoru). Ove mašine nazivaju se i komutatorskim mašinama. Elektromotorni pogoni sa motorima jednosmerne struje imaju sledeće karakteristike:

- jednostavna regulacija brzine obrtanja i mogućnost održavanja konstantne brzine obrtanja,
- nezavisna regulacija brzine i momenta,
- fleksibilno upravljanje motorom u bilo kom režimu rada,
- veliki polazni moment.

1.7.1 Ekvivalentna šema

Na slici 1-11 prikazana je ekvivalentna šema idealizovane mašine za jednosmernu struju sa nezavisnim pobuđivanjem. Zbog izrazite magnetne nelinearnosti u pobudnom kolu nisu definisane nikakve induktivnosti, već je data karakteristika magnećenja $\psi_f = \psi_f(i_f)$, gde je ψ_f pobudni fluks obuhvaćen od strane indukta.



Slika 1-11 Ekvivalentna šema mašine za jednosmernu struju sa nezavisnom pobudom

1.7.2 Matematički model

Za elektri□no kolo indukta (rotora) i pobudno kolo mogu se napisati slede□e naponske, diferencijalne, jedna□ine:

$$u_a = R_a\, i_a + L_a \frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} + e = R_a\, i_a + L_a \frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} + \omega\, \psi_f\,;$$

$$u_f = R_f\, i_f + n \frac{\mathrm{d}\psi_f}{\mathrm{d}t}$$

gde su:

u_a, i_a - napon i struja indukta (armature),

R_a, L_a - otpornost i induktivnost indukta (armature),

e – indukovana kontra-elektromotorna sila usled rotacije, koja je dominantna na desnoj strani naponske jednačine indukta,

ω – ugaona brzina obrtanja rotora,

ψ_f - pobudni fluks obuhvaćen induktom,

u_f, i_f – napon i struja pobudnog kola,

R_f, L_f – otpornost i induktivnost pobudnog kola,

n - odnos između broja navojaka pobudnog namotaja i ekvivalentnog broja navojaka indukta.

Veza između pobudne struje i fluksa je nelinearna i određena krivnom magnećenja:

$$\psi_f = \psi_f\,(i_f)$$

Njutnova jednačina kretanja (rotacije), uz zanemareno trenje glasi:

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = m_e - m_m$$

Ovde je J momenat inercije svih obrtnih delova pogona (sveden na rotor motora), m_e – (električni) moment motora, m_m – (mehanički) moment opterećenja .

Električni momenat je jednak proizvodu struje i pobudnog fluksa:

$$m_e = i_a\,\psi_f$$

a mehanički momenat je u opštem slučaju funkcija brzine, ugla rotora i vremena:

$$m_m = m_m(\omega, \vartheta, t)\,,$$

ali u praksi najčešće funkcija samo brzine.

U pojedinim slučajevima (pozicioni servosistemi, zavisnost momenta opterećenja od ugla, torzija vratila) potrebno je dodati i četvrtu diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = \omega\,.$$

Kao što se vidi, mašina za jednosmernu struju u najsloženijem slučaju predstavlja dinamički sistem četvrtog reda ili, ako ugao rotora nije od interesa, sistem trećeg reda. Sistem se svodi na drugi red ako se pri tome posmatraju pojave pri konstantnoj pobudi, jer otpada izvod u naponskoj jednačini pobudnog kola. Najzad, samo na prvi red, ako se zanemare pojave u induktu, jer tada otpada i izvod u naponskoj jednačini indukta.

1.7.3 Jednačine ustaljenog stanja

U ustaljenom stanju svi izvodi su nule, pa je matematički model znatno uprošćen i glasi:

$$u_a = R_a\,i_a + \omega\,\psi_f$$

$$u_f = R_f\,i_f$$

$$\psi_f = \psi_f\,(i_f)$$

$$m_e = m_m$$

$$m_e = i_a\,\psi_f$$

Ovaj sistem od 5 jednačina ima 8 promenljivih. Da bi bio rešiv, potrebno je da 3 promeljive budu date, npr. dve upravljačke u_a i u_f (ili ψ_f) i jedna poremećajna m_m.

1.8 Metode za rešavanje zadataka

Cilj je doći do takvog matematičkog modela kojim će se efikasno i uz zadovoljavajuću tačnost predvideti ponašanje realnog, fizičkog dinamičkog sistema. Efikasnost nas upućuje na primenu računara, pa je jedan od kriterijuma da matematički model bude pogodan za simulaciju na računaru. U osnovi, dinamički sistem se može opisati sa jednom diferencijalnom jednačinom n - tog reda ili sa n diferencijalnih jednačina prvog reda. Za analize ponašanja dinamičkih sistema se u primenjuju dve osnovne metode:

- *operatorska metoda*,
- *metoda prostora stanja*.

Operatorska (frekfentna) metoda je praktično je primenljiva samo kod linearnih sistema sa konstantnim parametrima, tj. matematičkih modela sastavljenih iz linearnih algebarskih i integro-diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima. Zasniva se na *Laplasovoj transformaciji*, kojom se pod određenim uslovima jednoznačno zamenjuje data vremenska funkcija *f(t)* (original) drugom funkcijom *F(p)* (kompleksnim likom), gde je *p* kompleksna promenljiva Laplasove transformacije. U osnovi, diferencijalne jednačine se po formi i mogućnostima manipulacije pretvaraju u linearne algebarske jednačine, a zavisnost svakog pojedinog izlaza od svakog pojedinog ulaza može se izraziti količnikom (prenosnom funkcijom) dva polinoma po *p*.

Metoda prostora stanja ne menja oblik vremenskih i diferencijalnih jednačina. Eksplicitno izražavanje odnosa između promenljivih, kao kod operatorske metode, nije moguće. Ova metoda je pogodnija za primenu na računarima i ima šire područje primene – mogu se rešavati nelinearni sistemi, sistemi sa promenljivim parametrima, sistemi sa više ulaza i izlaza, stohastički sistemi, može da služi za optimalno upravljanje.

Dinamički sistem se u metodi prostora stanja definiše kao skup matematičkih relacija koji povezuje dva skupa promenljivih veličina, i to izlazni skup i ulazni skup, izraženih u obliku vektora izlaznih odnosno ulaznih promenljivih $\mathbf{y}(t)$i $\mathbf{z}(t)$, respektivno. Pored ova dva skupa definiše se i treći skup, vektor stanja $\mathbf{x}(t)$, sa promenljivama stanja, koje u fizičkom smislu predstavljaju fizičke veličine koje karakterišu stanje nekog inercijalnog sistema (skladišta energije) u sistemu, kao što je npr. brzina v tela mase m, uglovna brzina ω obrtnog tela momenta inercije J, struja i ili fluks u prigušnici induktivnosti L, napon u na kondenzatoru kapaciteta C i sl. Promenljive iz skupa promenljivih stanja mogu se, ali ne moraju nalaziti u skupu izlaznih promenljivih. Broj promenljivih stanja uvek je jednak redu sistema (broju skladišta energije).

U slučaju linearnog dinamičkog sistema n -tog reda, sa m ulaza i k izlaza, imamo:

vektor izlaza: $\mathbf{y}(t)=[y_1(t) \quad y_2(t) \quad .. \quad y_k(t)]^+$,

vektor ulaza: $\mathbf{z}(t)=[z_1(t) \quad z_2(t) \quad .. \quad z_m(t)]^+$,

vektor stanja: $\mathbf{x}(t)=[x_1(t) \quad x_2(t) \quad .. \quad x_n(t)]^+$.

a matematički izrazi u prostoru stanja (tzv. jednačine stanja) mogu se svesti na oblik:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{z} \qquad \mathbf{x}_0=\mathbf{x}(t_0)$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\,\mathbf{x}+\mathbf{D}\,\mathbf{z}$$

gde je : $\mathbf{A}$ - matrica sistema dimenzija $[n,n]$,

$\mathbf{B}$ - matrica ulaza dimenzija $[n,m]$,

$\mathbf{C}$ - matrica izlaza dimenzija $[k,n]$,

$\mathbf{D}$ - matrica dimenzija $[k,m]$,

$t_0 -$ vreme u početku posmatranja.

1.8.1 Opšte jednačine stanja električne mašine

Iz osnovnog matematičkog modela električne mašine:

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}}{\mathrm{d}t} + \omega\,\mathbf{Y}\boldsymbol{\psi};$$

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{L}\mathbf{i};$$

$$m_m = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + K\omega - Pm;$$

$$m = \mathbf{i}^{+}\,\mathbf{Y}\,\mathbf{u} + \frac{1}{2}\,\mathbf{i}^{+}\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}\vartheta}\mathbf{i} \;\; ;$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t},$$

Mora se eliminisati ili ukupni fluks ψ ili struja i, da bi jednačine sveli na potreban oblik.

Sada imamo:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}}{\mathrm{d}t} = -\mathbf{R}\mathbf{i} - \omega\,\mathbf{Y}\boldsymbol{\psi} + \mathbf{u},$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{L}^{-1}\,\boldsymbol{\psi},$$

pa se zamenom dobija:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}}{\mathrm{dt}} = -\left(\mathbf{R}\,\mathbf{L}^{-1} + \omega\,\mathbf{Y}\right)\boldsymbol{\psi} + \mathbf{u}.$$

Sada se odmah dobija potreban oblik jednačina:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}_a\,\mathbf{x}_a + \mathbf{B}_a\,\mathbf{z}_a \qquad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_a\,(t_0)$$

$$\mathbf{y}_a = \mathbf{C}_a\mathbf{x}_a$$

$$\mathbf{x}_a = \boldsymbol{\psi},\; \mathbf{y}_a = \mathbf{i},\; \mathbf{z}_a = \mathbf{u},\; \mathbf{A}_a = -\left(\mathbf{R}\,\mathbf{L}^{-1} + \omega\,\mathbf{Y}\right),\; \mathbf{B}_a = \mathbf{I}\;,\; \mathbf{C}_a = \mathbf{L}^{-1}.$$

1.8.2 Matematički model mašine jednosmerne struje u prostoru stanja

U opštem slučaju mašina se može shvatiti kao nelinearni dinamički sistem četvrtog reda sa vektorom stanja:

$$\mathbf{x} = [i_a \quad \psi_f \quad \omega \quad \vartheta]^+$$

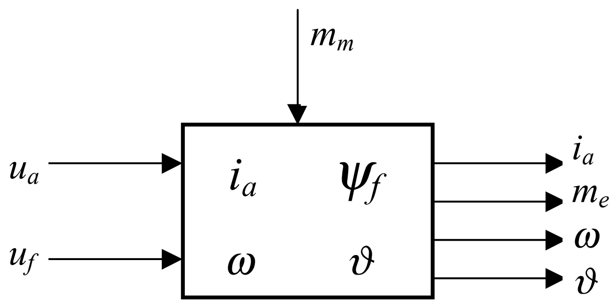
i vektorom ulaza:

$$\mathbf{z} = [u_a \quad u_f \quad m_m]^+$$

gde je m_m poremećajna promenljiva.

Vektor izlaza zavisi od uloge mašine u regulisanom pogonu. Jedan od mogućih složenijih praktičnih slučajeva prikazan je na slici 1-12, gde je vektor izlaza:

$$\mathbf{y} = [i_a \quad m_e \quad \omega \quad \vartheta]^+$$



Slika 1-12 Mašina za jednosmernu struju kao dinamički sistem

Ako se upravljanje vrši samo preko napona u_a, tj. ako je $\psi_f = \Psi_f = C^{te}$, model postaje linearan, pa se može prikazati sa jednačinom stanja trećeg reda:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bz}$$

sa vektorom stanja:

$$\mathbf{x} = [i_a \quad \omega \quad \vartheta]^+ ,$$

vektorom ulaza:

$$\mathbf{z} = [u_a \ m_m]^+ ,$$

matricom sistema i ulaza:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{T_a} & -\dfrac{\Psi_f}{R_a T_a} & 0 \\ \dfrac{\Psi_f}{T_m} & -\dfrac{K_m}{T_m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_a T_a} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{T_m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gde je

$T_a = \dfrac{L_a}{R_a}$ vremenska električna konstanta indukta,

$T_m = \dfrac{J\,\omega_n}{m_b}$ vremenska mehanička konstanta.

Jednačina izlaza zavisi od izbora izlaznih veličina. Ako su to, npr. brzina ω i struja i_a, ona glasi $\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$, sa vektorom izlaza:

$$\mathbf{y} = [\omega \quad i_a]^{+}$$

i matricom izlaza:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.9 Literatura

[1] V. Vučković: *Opšta teorija električnih mašina*, Nauka, Beograd, 1992.

[2] V. Vučković: *Električni pogoni*, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1997.